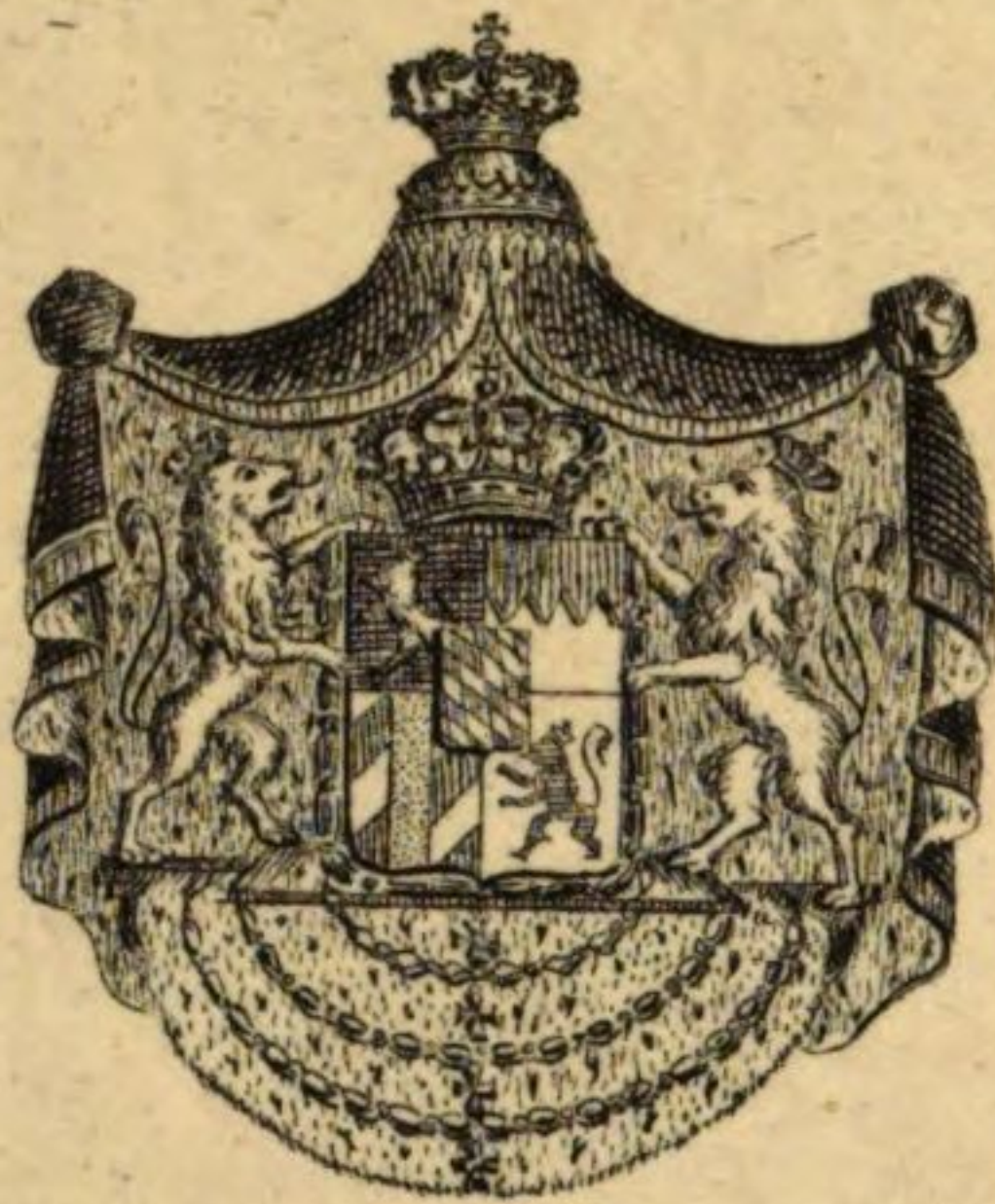


Math. P.

042²

Math. P.
642^r

Woerckel



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch
der
ebenen und sphärischen
TRIGONOMETRIE

mit einem Anhang
trigonometrischer Aufgaben
zum Gebrauch

für
Gymnasien und technische Lehranstalten

v o n

Dr. L. Woeckel,

Professor der Mathematik am königlichen Gymnasium
zu Nürnberg.

Mit einer Kupfertafel.

Nürnberg,
Verlag von Riegel und Wiessner.

1836.

Wa
89 C.

III. Abschnitt.

	Seite
Sphärische Trigonometrie..	70—102.
Erklärungen	70— 72.
A. Entwicklung von Formeln zur Berechnung der sphärischen Dreiecke	72— 85.
B. Berechnung der Seiten und Winkel der sphärischen Dreiecke.....	85— 97.
Zusammenstellung der verschiedenen, bei sphär. Dreiecken vorkommenden Fälle und ihrer Auflösung	98— 99.
C. Berechnung des Flächeninhalts der sphärischen Dreiecke	100—102.
Anhang von trigonometrischen Aufgaben nebst kurzer Andeutung ihrer Lösung	103—120.
I. Aus der ebenen Trigonometrie ..	103—112.
II. Aus der sphärischen Trigonometrie	112—120.

E i n l e i t u n g.

§. 1.

Die Trigonometrie (Dreiecksmessung) ist derjenige Theil der Mathematik, welcher aus 3 gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen durch Rechnung finden lehrt.

Sind die Dreiecke, mit deren Berechnung sich die Trigonometrie beschäftigt, geradlinig, in einer Ebene liegend, so heisst die Trigonometrie selbst ebene, im Gegensatz zur sphärischen, welche die Dreiecke zum Gegenstand ihrer Berechnung hat, die durch drei Bögen grösster Kugelschnitte gebildet werden.

Durch Construction wird die Aufgabe der ebenen Trigonometrie schon in der Geometrie gelöst, wo ein Dreieck bestimmt ist, wenn von den 3 Seiten und 3 Winkeln, den 6 Stücken desselben, irgend 3 Stücke, jedoch mit Einschluss einer Seite, gegeben sind. Um sie aber durch Rechnung lösen, und aus Seiten Winkel, und aus Winkeln Seiten bestimmen zu können, war vor Allem nothwendig, die 6 Stücke eines Dreiecks gleichar-

tig zu machen. Diess geschah dadurch, dass man gewisse gerade Linien einführte, welche von den Winkeln eines Dreiecks der Art abhängen, dass man im Stande ist, die Winkel durch Linien auszudrücken. Diese Linien, (trigonometrische genannt), welche den Winkeln eines Dreiecks, als Centriwinkel in irgend einem Kreise betrachtet, zugehören, berechnete man für jeden Winkel in Theilen des Halbmessers, der stets als Maassstab zu Grunde liegt, und erhielt so in Zahlen ausgedrückt die Grösse der correspondirenden Winkel.

Durch dieses Verfahren hat man es blos mit gleichartigen Grössen in einem Dreiecke zu thun, und ist die Möglichkeit gegeben, aus dreien dieser Grössen die noch übrigen drei andern mittelst Rechnung zu finden.

§. 2.

Der Theil der Mathematik, welcher von diesen trigonometrischen, von den Winkeln abhängenden, Linien, ihrer gegenseitigen Beziehung, Berechnung und der Untersuchung ihrer Natur handelt, heisst *Goniometrie* (Winkelmessung, und zwar durch Linien). Sie beschäftigt sich mit Vergleichen der Winkel mittelst dieser trigonometrischen Linien, ohne Rücksicht auf die Figuren zu nehmen, in welchen die Winkel vorkommen, und ist daher von der Trigonometrie wesentlich verschieden; muss aber in so ferne als ein Theil derselben betrachtet werden, als man diese goniometrischen Lehren und

Untersuchungen und die Berechnung der trigonometrischen Linien in ihr als bekannt voraussetzt.

Dadurch wird der Begriff der Trigonometrie erweitert, und man versteht dann unter ihr: die ganze Lehre von den trigonometrischen Linien und deren Anwendung auf die Berechnung der Dreiecke.

§. 3.

Die Polygonometrie (Vielecksmessung) sucht für mehrseitige Figuren dasselbe zu leisten, was die Trigonometrie für Dreiecke. Man pflegt sie auch noch in das Gebiet der Trigonometrie herein zu ziehen; sie ist aber zu umfassend, als dass die Grenzen dieses Lehrbuches sie aufzunehmen gestattet.

I. A b s c h n i t t.

Goniometrie.

Von den trigonometrischen Linien.

§. 4.

Angabe und Bezeichnung derselben.

Beschreibt man (Fig. 1.) aus dem Scheitel eines spitzen Winkels ACB, den wir der Kürze halber mit bezeichnen wollen, mit einem belie-

bigen Halbmesser einen Kreisbogen AB, und fällt vom Punkte B, wo solcher den einen Schenkel durchschneidet, auf den andern Schenkel die Senkrechte BD, so heisst diese der Sinus des Winkels α oder des Bogens AP, und das Stück des Halbmessers zwischen dem Sinus und dem Endpunkte des Halbmessers, d. i. AD heisst *Quersinus* oder *Sinus versus* desselben Winkels oder Bogens; so dass man hat:

$$BD = \text{Sin. } \alpha = \text{Sin. arc. AB.}$$

$$AD = \text{Sin. vers. } \alpha = \text{Sin. vers. AB.}$$

Die auf dem Halbmesser AC im Endpunkte A errichtete Senkrechte, welche von dem verlängerten zweiten Halbmesser BC in E durchschnitten wird, d. h. die Linie AE, heisst *Tangente*, so wie dieser verlängerte Halbmesser CE selbst *Secante* des Winkels α , oder des Bogens AB, und man hat:

$$AE = \text{Tang. } \alpha = \text{Tang. arc. AB,}$$

$$CE = \text{Sec. } \alpha = \text{Sec. arc. AB.}$$

Bezeichnet man das Complement des Winkels ACB, d. i. den Winkel BCF mit β , und zieht, wie in dem Winkel ACB, die jenen entsprechenden Linien BG, HF, so ist gleichfalls:

$$BG = \text{Sin. } \beta = \text{Sin. arc. BF,}$$

$$FG = \text{Sin. vers. } \beta = \text{Sin. vers. arc. BF,}$$

$$FH = \text{Tang. } \beta = \text{Tang. arc. BF,}$$

$$CH = \text{Sec. } \beta = \text{Sec. arc. BF.}$$

Diese trigonometrischen Linien des Complements - Winkels β bringt man in Beziehung auf

den Winkel α dadurch, dass man ihrer Benennung die Sylbe Co- (Complementi) vorsetzt, und erhält so:

$$BG = \text{Sin. } \beta = \text{Cosin. } \alpha,$$

$$FG = \text{Sin. vers. } \beta = \text{Cosin. vers. } \alpha,$$

$$FH = \text{Tang. } \beta = \text{Cotang. } \alpha,$$

$$CH = \text{Sec. } \beta = \text{Cosec. } \alpha;$$

so dass man für den Winkel α folgende 8 trigonometrische Linien hat:

$$BD = \text{Sin. } \alpha,$$

$$CD = \text{Cosin. } \alpha,$$

$$AD = \text{Sin. vers. } \alpha,$$

$$FG = \text{Cosin. vers. } \alpha,$$

$$AE = \text{Tang. } \alpha,$$

$$FH = \text{Cotang. } \alpha,$$

$$CE = \text{Sec. } \alpha,$$

$$CH = \text{Cosec. } \alpha.$$

§. 5.

Eben so hat man für den Winkel β ,

$$BG = \text{Sin. } \beta,$$

$$CG = \text{Cosin. } \beta,$$

$$FG = \text{Sin. vers. } \beta,$$

$$AD = \text{Cosin. vers. } \beta,$$

$$FH = \text{Tang. } \beta,$$

$$AE = \text{Cotang. } \beta,$$

$$CH = \text{Sec. } \beta,$$

$$CE = \text{Cosec. } \beta,$$

und es bezeichnet demnach:

$$\text{Cosin. } \alpha = \text{Sin. } (90 - \alpha),$$

$$\text{Cosin. vers. } \alpha = \text{Sin. vers. } (90 - \alpha),$$

$$\text{Cotang. } a = \text{Tang. } (90 - a),$$

$$\text{Cosec. } a = \text{Sec. } (90 - a);$$

$$\text{Sin. } a = \text{Cosin. } (90 - a),$$

$$\text{Sin. vers. } a = \text{Cosin. vers. } (90 - a),$$

$$\text{Tang. } a = \text{Cotang. } (90 - a),$$

$$\text{Sec. } a = \text{Cosec. } (90 - a).$$

§. 6.

Betrachtung der einzelnen trigonometrischen Linien.

Vom Sinus.

1) Denkt man sich, der Bogen AB wachse von A nach B (Fig. 3.) zu jeder beliebigen Grösse an und ACE stelle für diesen Fall den ersten Quadranten vor, so sieht man leicht, dass mit dem Wachsen des Bogens AB in diesem ersten Quadranten zugleich ein Zunehmen des dazu gehörigen Sinus verbunden sey, wenn gleich dieses Wachsen des Sinus mit dem Winkel von beiden Seiten nicht gleichförmig und nicht z. B. der Sinus des doppelten Winkels auch dem doppelten Sinus des einfachen Winkels gleich ist. Im Punkte A selbst oder für den Bogen und Winkel von 0° , ist der Sinus gleichfalls $= 0$, dagegen im Punkte E, oder für den Bogen und Winkel von 90° , ist derselbe dem Halbmesser $CE = r$ gleich und daselbst für die Bögen und Winkel des ersten Quadranten am grössten, wesshalb er auch *Sinus totus* heisst.

2) Wächst der Bogen von A nach B über den Punkt E hinaus nach F in den zweiten Quadranten, so ist FG der zugehörige Sinus des

stumpfen Winkels ACF ; und man sieht leicht ein, dass, je mehr der Bogen in diesen zweiten Quadranten hineinwächst, oder je grösser der Winkel über 90° bis 180° wird, die entsprechenden *Sinus* in der umgekehrten Ordnung wie im ersten Quadranten wieder abnehmen, dass für den Punkt H aber, oder für den Winkel von 180° , der *Sinus* selbst $= 0$ sey.

Der *Sinus* des stumpfen Winkels ACF selbst ist dem *Sinus* des Winkels FCH, oder dem *Sinus* seines Supplements gleich, d. h.

$$\text{Sin. ACF} = \text{Sin. } (180 - \text{ACF})$$

$$= \text{Sin. } (\pi - \text{ACF}),$$

wo π den halben Kreisumfang oder den Bogen von 180° bezeichnet.

3) Wird der Winkel grösser als 180° , und liegt demnach im dritten Quadranten, z. B. ACJ, so ist sein zugehöriger *Sinus* $=$ KJ, der um so grösser wird, je mehr der Winkel von 180° bis 270° zunimmt. Im letzteren Falle, oder für den Winkel von 270° ist der *Sinus* dem Halbmesser gleich, und wird, wie bei dem *Sinus* von 90° , *Sinus totus* genannt.

Was die Lage der *Sinus* im dritten Quadranten in Bezug auf derselben Lage in den beiden ersten betrifft, so ist sie derselben gerade entgegengesetzt. So wie nun in der Algebra die Zeichen $+$ und $-$ Zustände bedeuten, die einander gerade entgegen gesetzt sind, so zeigen sie dagegen in der Geometrie entgegengesetzte Richtun-

gen an. Wenden wir diess hier auf unseren vorliegenden Fall an, und bezeichnen die gleiche Lage der *Sinus* in den beiden ersten Quadranten mit dem Zeichen (+), so werden wir demnach den *Sinus* im dritten Quadranten, um ihre, jenen entgegengesetzte, Lage anzudeuten, das Zeichen (—) zu geben haben, und es ist demnach $\text{Sinus ACJ} = -\text{JK}$ und $\text{Sinus ACL} = -r$; wo durch r , wie in der Folge immer, der Halbmesser des betreffenden Kreises ausgedrückt seyn soll.

Der *Sinus* des erhabenen Winkels ACJ im dritten Quadranten ist dem *Sinus* seines Ueberschusses über π gleich, d.i. $\text{Sinus ACJ} = \text{Sinus (ACJ} - \pi) = -\text{Sinus HCJ}$.

4) Erstreckt sich der Bogen vom Punkte A aus nach B bis in den vierten Quadranten, z. B. bis zum Punkte M, so ist $\text{MN} = \text{Sinus ACM} = \text{Sin. arc. AHM}$; und man sieht leicht ein, dass, je weiter der Winkel in den vierten Quadranten sich hinein erstreckt, der zugehörige *Sinus* um so kleiner wird, wie es im zweiten Quadranten der Fall war. Für den Punkt A, oder den Winkel von 360° , ist der zugehörige *Sinus* = 0.

Was die Lage der *Sinus* anbetrifft, so ist sie hier dieselbe wie im dritten Quadranten, und es bekommen desshalb die *Sinus* im vierten Quadranten gleichfalls das negative Zeichen (—).

Der *Sinus* des erhabenen Winkels ACM ist dem Supplement desselben zu 2π gleich, so dass $\text{Sinus ACM} = -\text{Sinus (} 2\pi - \text{arc. AHM)}$

5) Für einen Winkel im fünften Quadranten, welcher zwar nicht in der Geometrie, jedoch im Calcul vorkommt, wo man z. B. *Sinus* von einer Summe von Winkeln, die grösser als 360° ist, zu behandeln hat, erhält man denselben *Sinus*, wie vom Winkel, um welchen er sich in den fünften Quadranten erstreckt, so dass, wenn α m t einen spitzen Winkel bezeichnet,

$$\text{Sinus } (2\pi + \alpha) = + \text{Sinus } \alpha \text{ ist.}$$

Auf dieselbe Weise erhält man für Winkel im siebenten, neunten etc. Quadranten

$$\text{Sin. } (3\pi + \alpha) = - \text{Sin. } \alpha,$$

$$\text{Sin. } (4\pi + \alpha) = + \text{Sin. } \alpha,$$

$\text{Sin. } (5\pi + \alpha) = - \text{Sin. } \alpha$, weil die *Sinus* im ersten und zweiten Quadranten positiv, in den dritten und vierten negativ, und so abwechselnd in den zwei nächsten positiv, und in den darauf folgenden negativ sind.

Für einen Winkel im sechsten Quadranten erhält man denselben *Sinus*, wie für den stumpfen Winkel, um welchen er grösser ist als 2π , so dass, wenn β diesen stumpfen Winkel bezeichnet,

$$\text{Sin. } (2\pi + \beta) = \text{Sin. } \beta = \text{Sin. } (\pi - \beta).$$

Gleichfalls hat man für Winkel im achten, zehnten etc. Quadranten:

$$\text{Sin. } (3\pi + \beta) = - \text{Sin. } \beta = - \text{Sin. } (\pi - \beta)$$

$$\text{Sin. } (4\pi + \beta) = + \text{Sin. } \beta = + \text{Sin. } (\pi - \beta)$$

Diese Bemerkungen von Winkeln, die grösser sind als 2π , gelten, mit Ausnahme der Bezeichnung, für alle trigonometrischen Linien.

§. 7.

Vom *Cosinus*.

1) Im ersten Quadranten ACE (Fig. 3.), wo CD den *Cosinus* des Winkels ACB vorstellt, nimmt der *Cosinus* um so mehr an Grösse ab, je mehr der Winkel sich dem Rechten, oder dem Winkel von 90° annähert. Er wird $= 0$, wenn der Winkel diese Grösse von 90° erreicht, und ist am grössten bei dem Winkel von 0° , wo er dem Halbmesser AC $= r$ gleich ist.

2) Für den stumpfen Winkel ACF im zweiten Quadranten ist CG der zugehörige *Cosinus*. Die *Cosinus* wachsen in diesem Quadranten, wie leicht ersichtlich, um so mehr, je mehr der Winkel sich π oder 180° annähert. Für den Winkel von 180° selbst ist der *Cosinus* daselbst am grössten und dem Halbmesser CH $= r$ gleich.

Die Lage der *Cosinus* ist hier der im ersten Quadranten entgegengesetzt, so dass, wenn man diesen, wie gewöhnlich geschieht, das Zeichen (+) gibt, man die *Cosinus* im zweiten Quadranten mit (—) bezeichnet.

Wie bei dem *Sinus* hat man auch

$\text{Cosin. ACF} = - \text{Cosin. } (\pi - \text{ACF})$,
oder der *Cosinus* eines stumpfen Winkels ist dem *Cosinus* seines Supplements gleich.

3) Die Winkel im dritten Quadranten, wie z. B. ACJ, dessen $\text{Cosin.} = \text{CK}$, haben um so kleinere *Cosinus*, je mehr sie in den dritten Qua-

dranten selber hineintreten. Wird der Winkel 270° , so ist sein zugehöriger *Cosinus* $= 0$, und zwar mit dem Zeichen $(-)$ wegen der gleichen Lage mit denen des zweiten Quadranten.

Der *Cosinus* eines Winkels in diesem Quadranten ist dem *Cosinus* seines Ueberschusses über π gleich, d. i.

$$\text{Cosin.ACJ} = \text{Cosin.}(\text{ACJ} - \pi) = - \text{Cosin.HCJ.}$$

4) Der *Cosinus* des Winkels ACM, oder des Bogens AHM im vierten Quadranten ist CN. Von 270° bis 360° wachsen die *Cosinus* immer mehr, und für den Winkel von 360° wird der *Cosinus* selbst dem Halbmesser CA $= r$ gleich.

Was das Zeichen betrifft, so haben die *Cosinus* wegen ihrer gleichen Lage mit denen im ersten Quadranten, das Zeichen $(+)$; und hinsichtlich der Grösse ist der *Cosinus* des Winkels ACM dem *Cosinus* seines Supplements zu 2π gleich, so dass:

$$\begin{aligned} \text{Cosin. ACM} &= + \text{Cosin. } (2\pi - \text{ACM}) \\ &= + \text{Cosin. } (2\pi - \text{arc. AHM.}) \end{aligned}$$

§. 8.

Vom *Sinus vers.*

1) Der *Sin. vers.* des Winkels ACB (Fig. 2.) ist $= AD$, und des Winkels ACF im zweiten Quadranten ist $= AG$, so dass leicht ersichtlich, dass die *Sin. vers.* immer grösser werden, je weiter sich der Winkel in den zweiten Quadranten erstreckt. Für den Winkel von 0° ist *Sin. vers.*

ebenfalls $= 0$, für den Winkel von 180° aber, oder *Sin. vers.* $\pi =$ dem Durchmesser $AH = 2r$.

2) Wird der Winkel grösser als 180° , so nimmt der zugehörige *Sin. vers.* immer mehr ab, bis er endlich für den Winkel von $360^\circ = 0$ wird.

3) Die Lage der *Sin. vers.* bleibt für jeden Winkel der vier Quadranten dieselbe, und wird mit $(+)$ bezeichnet.

§. 9.

Vom *Cosin. vers.*

1) Der *Cosin. vers.* des Winkels ACB (Fig. 2.) ist $= EO$, und nimmt im ersten Quadranten immer mehr ab, je mehr der Winkel, zu dem er gehört, sich 90° nähert. Desshalb ist auch *Cosin. vers.* $90^\circ = 0$, aber *Cosin. vers.* $0^\circ = CE = r$.

2) Für den Winkel ACF im zweiten Quadranten ist EP der zugehörige *Cosin. vers.*, so wie für den Winkel ACJ im dritten, die Linie EQ . Je mehr der Winkel von $90^\circ - 270^\circ$ wächst, um so grösser wird auch sein *Cosin. vers.* Für den Winkel von 180° ist er $= CE = r$, und für den Winkel von 270° ist er $= 2r$.

3) Im vierten Quadranten verbindet sich mit dem Wachsen des Winkels ein Abnehmen des zugehörigen *Cosin. vers.* So ist *Cosin. vers.* $ACM = ER$, *Cosin. vers.* $2\pi = CE = r$.

4) Wegen seiner beständig gleichen Lage hat der *Cosin. vers.* für alle Winkel stets das positive Zeichen $(+)$.

§. 10.

Von der *Tangente*.

1) Je mehr der Winkel ACB im ersten Quadranten (Fig. 4.), dessen *Tangente* AD ist, sich dem Rechten nähert, um so grösser wird seine *Tangente*, und umgekehrt, so dass für den Winkel von 0° die zugehörige *Tangente* ebenfalls $= 0$, für den Winkel von 90° aber die zugehörige *Tangente* unendlich gross $= \infty$ ist, und mit der *Secante* parallel läuft.

2) Wird der Winkel grösser als 90° , z. B. ACF, so ist dessen *Tangente* $= AJ$, indem nur auf diese Weise ein Durchschnitt des Schenkels CF mit dem Perpendikel AD möglich ist. Daraus ist leicht zu erkennen, dass, je grösser der Winkel im zweiten Quadranten wird, demselben eine desto kleinere *Tangente* zukommt, dass die *Tangente* des Winkels von 180° aber $= 0$ ist.

Die Lage von AJ, und überhaupt die aller *Tangenten* im zweiten Quadranten ist der Lage der *Tangenten* im ersten entgegengesetzt, und sie erhalten desshalb das Zeichen (—).

Da *Tangente* ACF $= -AJ = \text{Tang. ACH} = \text{Tang. FCK}$, so folgt:

Nebenwinkel haben gleich grosse, aber der Lage nach entgegengesetzte *Tangenten*.

3) Die *Tangente* des Winkels ACL im dritten Quadranten ist AD, welche um so grösser wird, je mehr sich der flache Winkel dem Winkel

von 270° nähert, für letzteren Winkel aber selbst unendlich gross ist.

Ihre Lage ist dieselbe wie die der *Tangenten* im ersten Quadranten, daher ihre Bezeichnung mit $(+)$.

$$\begin{aligned} \text{Tang. ACL} &= \text{Tang. (ACL} - \pi) \\ &= + \text{Tang. KCL.} \end{aligned}$$

4) Wie im zweiten Quadranten haben die Winkel im vierten um so kleinere *Tangenten*, je weiter sie sich in denselben erstrecken; so dass für den Winkel von 360° die *Tangente* selber $= 0$ wird, und zwar $= - 0$, weil sie mit den *Tangenten* im ersten Quadranten eine entgegengesetzte Lage hat.

$$\begin{aligned} \text{AJ} &= \text{Tang. ACH} = \text{Tang. (} 2\pi - \text{ACH)} \\ &= - \text{Tang. (} 2\pi - \text{arc. AKH)}. \end{aligned}$$

§. 11.

Von der *Cotangente*.

1) Die *Cotangente* ME des Winkels ACB im ersten Quadranten (Fig. 4.) wird um so kleiner, je mehr der Winkel sich dem Rechten nähert, so dass $\text{Cotang. } 90^\circ = 0$, dagegen $\text{Cotang. } 0^\circ = \infty$ ist.

2) Befindet sich der Winkel im zweiten Quadranten, z. B. ACF, so ist seine zugehörige *Cotangente* $= \text{EG}$, und zwar $- \text{EG}$, weil sie eine den *Cotangenten* im ersten Quadranten entgegengesetzte Lage hat. Je mehr sich der Winkel dem flachen nähert, um so grösser werden

die zugehörigen *Cotangenten*, und *Cotangente*
 $180^\circ = - \infty$.

Wie bei den andern trigon. Linien hat man:

$Cotang. ACF = - Cotang. (\pi - ACF)$,
 oder die *Cotang.* eines stumpfen Winkels ist der
Cotang. seines Supplements gleich.

3) Der erhabene Winkel ACL im dritten
 Quadranten hat zur *Cotangente* die Linie EM,
 und zwar $+ EM$, weil hier die *Cotangente*
 gleiche Lage wie im ersten Quadranten hat. Die
Cotang. nehmen in diesem Quadranten mit dem
 Wachsen des Winkels stets ab, so dass *Cotang.*
 $270^\circ = + 0$ ist.

$$\begin{aligned} Cotang. ACL &= Cotang. (ACL - \pi) \\ &= + Cotang. KCL, \end{aligned}$$

4) Da die *Cotangente* des erhabenen Winkels
 ACH im vierten Quadranten die Linie EG ist, so
 wird leicht ersichtlich, dass hier die *Cotangenten*
 immer grösser werden, je mehr sich der Winkel
 360° annähert, und *Cotang.* 360° selbst $= \infty$.
 Ihre Lage ist die nämliche, wie die der *Cotangen-*
ten im zweiten Quadranten, und sie haben wie
 dort das Zeichen $(-)$.

$$\begin{aligned} Cotang. ACH &= Cotang. (2\pi - ACH) \\ &= - Cotang. (2\pi - arc. AKH). \end{aligned}$$

§. 12.

Von der *Secante*.

1) Die *Secante* CD des Winkels ACB im
 ersten Quadranten (Fig. 4.) wird um so grösser,

je mehr der Winkel in demselben wächst. Für den Winkel von 0° ist die zugehörige *Secante* dem Halbmesser $AC = r$ gleich, für den von 90° aber ist sie unendlich gross $= \infty$, und läuft mit der *Tangente* parallel.

2) Der stumpfe Winkel ACF im zweiten Quadranten hat zur *Secante* die Linie CJ , welche um so kleiner wird, je mehr sich der Winkel dem flachen nähert, so dass *Secante* $180^\circ = 0$, und zwar $= - 0$, weil hier die *Secanten* nicht in die Richtung des Winkelschenkels fallen, sondern z. B. der Schenkel CF erst rückwärts nach J verlängert werden muss, um die *Tangente* AJ zu schneiden.

$$\begin{aligned} \text{Da } \text{Sec. } ACF &= \text{Sec. } ACJ = \text{Sec. } FCK \\ &= \text{Sec. } (\pi - ACF) \end{aligned}$$

so folgt:

Nebenwinkel haben gleich grosse, aber der Lage nach entgegengesetzte *Secanten*.

3) Die *Secante* des Winkels ACL im dritten Quadranten ist CD , und zwar $- CD$, wegen der Rückwärtsverlängerung des Schenkels CL . Je grösser der Winkel über 180° wird, um so grösser ist die zugehörige *Sec.*, bis *Sec.* $270^\circ = - \infty$.

$$\text{Sec. } ACL = \text{Sec. } (ACL - \pi) = - \text{Sec. } RCL.$$

4) Wird der Winkel grösser als 270° , z. B. ACH , dessen *Secante* CJ , so nehmen die zugehörigen *Sec.* mit dem Wachsen desselben stets ab, so dass *Sec.* $360^\circ = 0$ ist, und zwar $= + 0$,

weil im vierten Quadranten die zu einem Winkel gehörige *Sec.* in der Richtung seines Schenkels liegt.

$$\text{Sec. ACH} = \text{Sec. } (2\pi - \text{ACH})$$

$$= + \text{Sec. } (2\pi - \text{arc. AKH}).$$

§. 13.

Von der *Cosecante*.

1) Mit dem Wachsen des Winkels ACB im ersten Quadranten (Fig. 4.), dessen *Cosecante* CM ist, nimmt die zugehörige *Cosecante* stets ab, bis $\text{Cosec. } 90^\circ = \text{CE} = r$ wird, nachdem $\text{Cosec. } 0^\circ$ unendlich gross $= \infty$ ist.

2) Die *Cosec.* CG des stumpfen Winkels ACF wird um so grösser, je mehr der Winkel sich dem flachen nähert, für welchen selber die zugehörige *Cosec.* $= \infty$ ist.

Weil in diesem Quadranten die *Cosec.* wie in dem ersten, in die Richtung der Schenkel fallen, so erhalten sie ebenfalls das Zeichen (+).

$$\text{Cosec. ACF} = \text{Cosec. } (\pi - \text{ACF})$$

$$= + \text{Cosec. FCK.}$$

3) Für Winkel im dritten Quadranten, z. B. für ACL, dessen *Cosec.* $= \text{MC}$ ist, nehmen die zugehörigen *Cosec.* immer mehr ab, je mehr dieselben sich 270° nähern. $\text{Cosec. } 270^\circ = \text{CE} = r$ und zwar $-r$, weil die *Cosec.* hier nicht in die Richtung des Schenkels des zugehörigen Winkels fallen.

$$\text{Cosec. ACL} = \text{Cosec. } (\text{ACL} - \pi)$$

$$= - \text{Cosec. KCL.}$$

4) Wie im zweiten Quadranten wachsen im vierten mit dem Winkel, z. B. ACH, dessen *Cosec.* = CG ist, die zugehörigen *Cosec.*, bis *Cosec.* $360^\circ = \infty$ wird, und zwar = $-\infty$ aus demselben Grunde, wie im dritten Quadranten.

$$\begin{aligned} \text{Cosec. ACH} &= \text{Cosec. } (2\pi - \text{ACH}) \\ &= -\text{Cosec. } (2\pi - \text{arc. AKH}). \end{aligned}$$

§. 14.

Von den negativen Winkeln und den zugehörigen trigonometrischen Linien.

In (Fig. 2.) betrachteten wir A als Anfangspunkt der Peripherie, den Halbmesser AC als unbeweglich, und liessen durch die Bewegung des Schenkels BC in der Richtung nach E, F, u. s. w. die verschiedenen Winkel in den vier Quadranten beschreiben. Nennen wir die nach dieser Richtung gebildeten Winkel und Bögen positiv und bezeichnen sie mit (+), so müssen in Beziehung hierauf alle Winkel und Bögen, die zwar A gleichfalls als Anfangspunkt und AC als den einen Schenkel haben, aber durch die Bewegung des Schenkels CM in der Richtung nach L, J, H u. s. w. entstehen, als negativ betrachtet und mit dem entsprechenden Zeichen (—) versehen werden. Es ist dann der erste, zweite, dritte und vierte Quadrant für negative Winkel nichts anders, als der vierte, dritte, zweite und erste für positive Winkel, und die zu den darinnen befindlichen negativen Winkeln gehörigen trigonometrischen Li-

nien erhalten dieselbe Bezeichnung, welche sie bekommen hätten, wenn der Winkel als positiv betrachtet worden wäre. Z. B.

$$\text{Sin. } (-\text{ACM}) = -\text{MN};$$

$$\text{Sin. } (-\text{ACJ}) = -\text{JK};$$

$$\text{Sin. } (-\text{ACF}) = +\text{FG};$$

$$\text{Sin. } (-\text{ACB}) = +\text{BD};$$

$$\text{Cosin. } (-\text{ACM}) = +\text{CN.}$$

$$\text{Cosin. } (-\text{ACJ}) = -\text{CH.}$$

$$\text{Cosin. } (-\text{ACF}) = -\text{CG.}$$

$$\text{Cosin. } (-\text{ACB}) = +\text{CD.}$$

§. 15.

Zusammenstellung der Werthe aller trigonometrischen Linien für positive und negative Winkel von 0° , 90° , 180° , 270° , 360° , nebst ihrer Bezeichnung in den verschiedenen Quadranten:

Für positive Winkel von						Quadrant			
	0°	90°	180°	270°	360°	I.	II.	III.	IV.
<i>Sinus</i>	0	r	0	-r	-0	+	+	-	-
<i>Cosinus</i>	r	0	-r	-0	r	+	-	-	+
<i>Sinus vers.</i>	0	r	2r	r	0	+	+	+	+
<i>Cosinus vers.</i>	r	0	r	2r	0	+	+	+	+
<i>Tangente</i>	0	∞	-0	∞	-0	+	-	+	-
<i>Cotangente</i>	∞	0	- ∞	0	- ∞	+	-	+	-
<i>Secante</i>	r	∞	-r	- ∞	r	+	-	-	+
<i>Cosecante</i>	∞	r	∞	-r	- ∞	+	+	-	-
Für negative Winkel von						Quadrant			
	360°	270°	180°	90°	0°	I.	II.	III.	IV.

Zusatz. Bezeichnet π , wie früher den halben Kreisumfang und a einen spitzen Winkel, so ergibt sich aus dem Bisherigen:

$$\text{Sin. } (90 + a) = + \text{Cos. } a.$$

$$\text{Sin. } (\pi + a) = - \text{Sin. } a.$$

$$\text{Sin. } \left(\frac{3}{2}\pi + a\right) = - \text{Cos. } a.$$

$$\text{Sin. } (2\pi + a) = + \text{Sin. } a.$$

$$\text{Sin. } \left(\frac{5}{2}\pi + a\right) = + \text{Cos. } a.$$

$$\text{Sin. } (3\pi + a) = - \text{Sin. } a.$$

$$\text{Sin. } \left(\frac{7}{2}\pi + a\right) = - \text{Cos. } a.$$

$$\text{Cos. } (90 + a) = - \text{Sin. } a.$$

$$\text{Cos. } (\pi + a) = - \text{Cos. } a.$$

$$\text{Cos. } \left(\frac{3}{2}\pi + a\right) = + \text{Sin. } a.$$

$$\text{Cos. } (2\pi + a) = + \text{Cos. } a.$$

$$\text{Cos. } \left(\frac{5}{2}\pi + a\right) = - \text{Sin. } a.$$

$$\text{Cos. } (3\pi + a) = - \text{Cos. } a.$$

$$\text{Cos. } \left(\frac{7}{2}\pi + a\right) = + \text{Sin. } a.$$

§. 16.

Von den einfachen Relationen der trigonometrischen Hilfslinien.

In Fig. 1. hat man nach dem Pythagoraeischen Lehrsatz:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2,$$

oder nach der trigonometrischen Bezeichnung dieser Linien:

$$r^2 = (\text{Sin. } a)^2 + (\text{Cos. } a)^2, \quad \text{I.}$$

Auf gleiche Weise ist:

$$\text{CE}^2 = \text{AC}^2 + \text{AE}^2, \text{ d. i.}$$

$$(\text{Sec. } a)^2 = r^2 + (\text{Tang. } a)^2. \quad \text{II.}$$

$$\text{CH}^2 = \text{CF}^2 + \text{FH}^2, \text{ d. i.}$$

$$(\text{Cosec. } a)^2 = r^2 + (\text{Cotang. } a)^2. \quad \text{III.}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CBD, CEA erhält man:

$$\text{AC} : \text{AE} = \text{CD} : \text{BD}$$

$$r : \text{Tang. } a = \text{Cosin. } a : \text{Sin. } a,$$

$$\text{Tang. } a = \frac{r \cdot \text{Sin. } a}{\text{Cosin. } a}. \quad \text{IV.}$$

$$\text{AC} : \text{CE} = \text{CD} : \text{CB}$$

$$r : \text{Sec. } a = \text{Cosin. } a : r$$

$$\text{Sec. } a = \frac{r^2}{\text{Cosin. } a} \quad \text{V.}$$

Eben so hat man, weil $\triangle \text{BCG} \sim \triangle \text{FCH}$,

$$\text{CF} : \text{FH} = \text{CG} : \text{BG}$$

$$r : \text{Cotang. } a = \text{Sin. } a : \text{Cosin. } a$$

$$\text{Cotang. } a = \frac{r \cdot \text{Cosin. } a}{\text{Sin. } a} \quad \text{VI.}$$

$$\text{CH} : \text{CF} = \text{CB} : \text{CG}$$

$$\text{Cosec. } a : r = r : \text{Sin. } a$$

$$\text{Cosec. } a = \frac{r^2}{\text{Sin. } a} \quad \text{VII.}$$

Endlich, weil $\triangle \text{CFH} \sim \triangle \text{ACE}$, indem $\angle \text{AEC} = \angle \text{FCH}$ als Complementswinkel zu $\angle a$,

$$AC : AE = FH : CF$$

$$r : \text{Tang. } a = \text{Cotang. } a : r$$

$$\text{VIII. } r^2 = \text{Tang. } a \cdot \text{Cotang. } a;$$

§. 17.

Diese 8 Grundrelationen sind mehr als hinreichend, wenn eine von den 6 trigonometrischen Linien (*Sin. vers.* und *Cosin. vers.* kommen so wenig in Anwendung, dass wir beide in der Folge unberücksichtigt lassen) gegeben ist, die übrigen durch dieselbe zu bestimmen.

Setzt man nämlich der Einfachheit halber den Radius $r = 1$, so hat man, wenn gegeben ist:

1) *Sin. a*

$$\text{Cosin. } a = \sqrt{1 - (\text{Sin. } a)^2}$$

$$\text{Tang. } a = \frac{\text{Sin. } a}{\sqrt{1 - (\text{Sin. } a)^2}}$$

$$\text{Cotang. } a = \frac{\sqrt{1 - (\text{Sin. } a)^2}}{\text{Sin. } a}$$

$$\text{Sec. } a = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{Sin. } a)^2}}$$

$$\text{Cosec. } a = \frac{1}{\text{Sin. } a}$$

2) *Cosin. a*

$$\text{Sin. } a = \sqrt{1 - (\text{Cos. } a)^2}$$

$$\text{Tang. } a = \frac{\sqrt{1 - (\text{Cos. } a)^2}}{\text{Cos. } a}$$

$$\text{Cotang. } a = \frac{\text{Cos. } a}{\sqrt{1 - (\text{Cos. } a)^2}}$$

$$\text{Sec. } a = \frac{1}{\text{Cos. } a}$$

$$\text{Cosec. } a = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{Cos. } a)^2}}$$

3) *Tang. a*

$$\text{Sin. } a = \text{Tang. } a \text{ Cos. } a = \frac{\text{Tang. } a}{\text{Sec. } a} = \frac{\text{Tang. } a}{\sqrt{1 + (\text{Tang. } a)^2}}$$

$$\text{Cosin. } a = \frac{1}{\text{Sec. } a} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\text{Tang. } a)^2}}$$

$$\text{Cotang. } a = \frac{1}{\text{Tang. } a}$$

$$\text{Sec. } a = \sqrt{1 + (\text{Tang. } a)^2}$$

$$\text{Cosec. } a = \frac{1}{\text{Sin. } a} = \frac{\sqrt{1 + (\text{Tang. } a)^2}}{\text{Tang. } a}$$

4) *Cotang. a*

$$\text{Sin. } a = \frac{1}{\text{Cosec. } a} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\text{Cotang. } a)^2}}$$

$$\text{Cosin. } a = \text{Sin. } a \cdot \text{Cotang. } a = \frac{\text{Cotang. } a}{\sqrt{1 + (\text{Cotang. } a)^2}}$$

$$\text{Tang. } a = \frac{1}{\text{Cotang. } a},$$

$$\text{Sec. } a = \frac{1}{\text{Cos. } a} = \frac{\sqrt{1 + (\text{Cotang. } a)^2}}{\text{Cotang. } a}.$$

$$\text{Cosec. } a = \sqrt{1 + (\text{Cotang. } a)^2}.$$

5) *Sec. a*

$$\text{Sin. } a = \frac{\sqrt{(\text{Sec. } a)^2 - 1}}{\text{Sec. } a}$$

$$\text{Cosin. } a = \frac{1}{\text{Sec. } a},$$

$$\text{Tang. } a = \sqrt{(\text{Sec. } a)^2 - 1},$$

$$\text{Cotang. } a = \frac{1}{\sqrt{(\text{Sec. } a)^2 - 1}},$$

$$\text{Cosec. } a = \sqrt{1 + (\text{Cotang. } a)^2} = \frac{\text{Sec. } a}{\sqrt{(\text{Sec. } a)^2 - 1}}$$

6) *Cosec. a*

$$\text{Sin. } a = \frac{1}{\text{Cosec. } a}$$

$$\text{Cosin } a = \frac{\sqrt{(\text{Cosec. } a)^2 - 1}}{\text{Cosec. } a}$$

$$\text{Tang. } a = \frac{1}{\sqrt{(\text{Cosec. } a)^2 - 1}}.$$

$$\text{Cotang. } a = \sqrt{(\text{Cosec. } a)^2 - 1}.$$

$$\text{Sec. } a = \frac{\text{Cosec. } a}{\sqrt{(\text{Cosec. } a)^2 - 1}}$$

§. 18.

Von den zusammengesetzten trigonometrischen Relationen.

A u f g a b e.

Aus den beiden gegebenen Sinus und Cosinus zweier Winkel den Sinus und Cosinus ihrer Summe zu finden.

A u f l ö s u n g.

Es werde der Kürze halber (Fig. 5.) der eine gegebene Winkel ACB, dessen Sinus BE, und

Cosinus CE bekannt ist, mit α , und der andere Winkel BCD, dessen *Sinus* DF, und *Cosinus* CF gleichfalls bekannt, mit β bezeichnet, so ist $DH = \text{Sinus } (\alpha + \beta)$ und $CH = \text{Cosinus } (\alpha + \beta)$, und unsere Aufgabe kommt darauf zurück, letztere Linien durch erstere auszudrücken.

Man ziehe $FG \parallel BE$, $FJ \parallel AC$, so erhält man, weil $JH = FG$,

$$DH = \text{Sin. } (\alpha + \beta) = DJ + JH = DJ + FG.$$

Da nun $\triangle BCE \sim \triangle FDJ \sim \triangle CFG$, so

$$DJ : DF = CE : CB, \text{ d. i.}$$

$$DJ : \text{Sin. } \beta = \text{Cosin. } \alpha : 1, \text{ woraus}$$

$$DJ = \text{Sin } \beta \cdot \text{Cosin. } \alpha;$$

$$\left. \begin{array}{l} FG \\ JH \end{array} \right\} : BE = CF : BC, \text{ d. i.}$$

$$JH : \text{Sin. } \alpha = \text{Cosin. } \beta : 1, \text{ woraus}$$

$$JH = \text{Sin } \alpha \cdot \text{Cosin. } \beta.$$

Substituirt man diese für HJ und DJ gefundenen Werthe in dem Ausdrucke $\text{Sin. } (\alpha + \beta) = HJ + DJ$, so erhält man:

$$\text{Sin. } (\alpha + \beta) = \text{Sin } \alpha \cdot \text{Cosin. } \beta + \text{Sin } \beta \cdot \text{Cosin. } \alpha. \text{ IX.}$$

Der *Cosinus* der Summe beider Winkel, d. i. $\text{Cos. } (\alpha + \beta) = CH = CG - GH = CG - FJ$.

Aus der Aehnlichkeit der vorher angeführten Dreiecke hat man:

$$CF : CG = BC : CE, \text{ d. i.}$$

$$\text{Cos. } \beta : CG = 1 : \text{Cos. } \alpha, \text{ woraus}$$

$$CG = \text{Cos } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta;$$

Eben so:

$$FJ : DF = BE : BC, \text{ d. i.}$$

$$FJ : \sin. \beta = \sin. \alpha : 1, \text{ woraus}$$

$$FJ = \sin. \alpha. \sin. \beta;$$

Substituirt man diese Werthe von CG, FJ gleichfalls im obigen Ausdruck von $\cos. (\alpha + \beta)$, so hat man:

$$X. \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha. \cos. \beta - \sin \alpha. \sin. \beta;$$

Diese beiden Formeln sind die Grundlage aller zusammengesetzten trigonometrischen Relationen, und ob sie gleich nur für spitze Winkel construirt sind, so können sie doch leicht durch Anwendung der weiter oben angeführten Sätze für beliebige andere Winkel brauchbar gemacht werden.

Der Uebung halber wollen wir noch die folgende Aufgabe nach Art der in diesem Paragraphen aufgelösten, d. h. synthetisch, behandeln, bei den übrigen Relationen aber uns der Kräfte der Analysis bedienen.

§. 19.

A u f g a b e.

Aus den beiden gegebenen Sinus und Cosinus zweier Winkel den Sinus und Cosinus ihrer Differenz zu finden.

A u f l ö s u n g.

Wenn $\angle ACB = \alpha$ und $\angle BCD = \beta$, (Fig. 6.) dessen Sinus BE, DF und Cosinus CE, CF

gegeben sind, so ist $\angle ACD = \angle (\alpha - \beta)$, und die treffenden zugehörigen trigonometrischen Linien sind DH, CH, d. i. $DH = \text{Sin. } (\alpha - \beta)$, $CH = \text{Cos. } (\alpha - \beta)$. Beide Linien lassen sich auf eine gleiche Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe, durch die Werthe der vier gegebenen bestimmen.

Man ziehe $FG \parallel BE$, $DJ \parallel AC$, so ist

$$DH = \text{Sin. } (\alpha - \beta) = FC - FJ.$$

$$CH = \text{Cos. } (\alpha - \beta) = CG + GH = CG + DJ.$$

Aus der Aehnlichkeit der $\triangle CFG$, CBE . DFJ erhält man:

$$DF : DJ = BC : BE, \text{ d. i.}$$

$$\text{Sin. } \beta : DJ = 1 : \text{Sin. } \alpha$$

$$DJ = \text{Sin. } \alpha. \text{Sin. } \beta.$$

$$CF : CB = CG : CE, \text{ d. i.}$$

$$\text{Cos. } \beta : 1 = CG : \text{Cos. } \alpha$$

$$CG = \text{Cos. } \alpha. \text{Cos. } \beta.$$

$$CF : FG = CB : BE, \text{ d. i.}$$

$$\text{Cos. } \beta : FG = 1 : \text{Sin. } \alpha$$

$$FG = \text{Sin. } \alpha. \text{Cos. } \beta.$$

$$DF : FJ = BC : CE, \text{ d. i.}$$

$$\text{Sin. } \beta : FJ = 1 : \text{Cos. } \alpha$$

$$FJ = \text{Sin. } \beta. \text{Cos. } \alpha.$$

Substituirt man die so eben gefundenen Werthe dieser 4 Linien in obige Ausdrücke, so hat man $\text{Sin. } (\alpha - \beta) = \text{Sin. } \alpha. \text{Cos. } \beta - \text{Sin. } \beta. \text{Cos. } \alpha$. XI. $\text{Cos. } (\alpha - \beta) = \text{Cos. } \alpha. \text{Cos. } \beta + \text{Sin. } \alpha. \text{Sin. } \beta$. XII.

Auf eine ganz einfache Weise gelangt man zu beiden letzten Formeln, wenn man in den vor-

hergehenden, IX. und X., den Winkel β als negativ betrachtet. Da nun dessen Sinus gleichfalls negativ, sein Cosinus aber positiv ist, so ergeben sich leicht die Formeln, welche wir so eben gefunden haben.

§. 20.

Weitere Entwicklung der brauchbarsten trigonometrischen Formeln für den Halbmesser 1. aus den bisher angeführten.

Setzt man in der Formel IX. und X. $\beta = \alpha$, so erhält man:

$$\text{XIII. Sin. } 2\alpha = 2 \text{ Sin } \alpha. \text{ Cos. } \alpha.$$

$$\text{XIV. Cos. } 2\alpha = (\text{Cos. } \alpha)^2 - (\text{Sin. } \alpha)^2,$$

Ferner, wenn man $2\alpha = u$ setzt,

$$\text{XV. Sin. } u = 2 \text{ Sin } \frac{1}{2} u. \text{ Cos. } \frac{1}{2} u,$$

$$\text{XVI. Cos. } u = (\text{Cos. } \frac{1}{2} u)^2 - (\text{Sin. } \frac{1}{2} u)^2.$$

Substituirt man in XIV. für $(\text{Cos. } \alpha)^2$, und dann für $(\text{Sin. } \alpha)^2$ ihre Werthe aus (I), so

$$\text{XVII. Cos. } 2\alpha = 1 - 2 (\text{Sin. } \alpha)^2$$

$$\text{XVIII. Cos. } 2\alpha = 2 (\text{Cos. } \alpha)^2 - 1, \text{ woraus wiederum}$$

$$\text{XIX. Sin. } \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \text{Cos. } 2\alpha)};$$

$$\text{XX. Cos. } \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \text{Cos. } 2\alpha)}; \text{ und wenn } 2\alpha = u,$$

$$\text{XXI. Sin. } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \text{Cos. } u)};$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \text{Cos. } u)}; \quad \text{XXII.}$$

$$1 - \text{Cos. } u = 2 (\text{Sin. } \frac{1}{2} u)^2; \quad \text{XXIII.}$$

$$1 + \text{Cos. } u = 2 (\text{Cos. } \frac{1}{2} u)^2; \quad \text{XXIV.}$$

Um $\text{Sin. } 3 a$, $\text{Cos. } 3 a$ zu finden, setze man in IX. und X. $\beta = 2 a$, und alsdann für $\text{Sin. } 2 a$, $\text{Cos. } 2 a$ aus den obigen Formeln die angeführten Werthe, und man hat nach gehöriger Reduktion:

$$\text{Sin. } 3 a = 3 \text{Sin. } a (\text{Cos. } a)^2 - (\text{Sin. } a)^3; \quad \text{XXV.}$$

$$\text{Cos. } 3 a = (\text{Cos. } a)^3 - 3 \text{Cos. } a (\text{Sin. } a)^2; \quad \text{XXVI.}$$

Auf gleiche Weise erhält man, wenn man in IX. und X, $\beta = 3 a$ setzt:

$$\text{Sin. } 4 a = 4 \text{Sin. } a (\text{Cos. } a)^3 - 4 (\text{Sin. } a)^3 \text{Cos. } a; \quad \text{XXVII.}$$

$$\text{Cos. } 4 a = (\text{Cos. } a)^4 - 6 (\text{Cos. } a)^2 (\text{Sin. } a)^2 + (\text{Sin. } a)^4; \text{ u. s. w.} \quad \text{XXVIII.}$$

Aus IV, XXI, XXII und aus VI, XXI, XXII, ist:

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{1 - \text{Cos. } a}}{\sqrt{1 + \text{Cos. } a}}; \quad \text{XXIX.}$$

$$\text{Cotang. } \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{1 + \text{Cos. } a}}{\sqrt{1 - \text{Cos. } a}}; \quad \text{XXX.}$$

Durch Addition und Subtraktion der Formeln IX. und XI., so wie X. und XII. hat man:

$$\text{Sin. } (a + \beta) + \text{Sin. } (a - \beta) = 2 \text{Sin. } a \text{Cos. } \beta. \quad \text{XXXI.}$$

$$\text{Sin. } (a + \beta) - \text{Sin. } (a - \beta) = 2 \text{Cos. } a \text{Sin. } \beta. \quad \text{XXXII.}$$

$$\text{Cos. } (a + \beta) + \text{Cos. } (a - \beta) = 2 \text{Cos. } a \text{Cos. } \beta. \quad \text{XXXIII.}$$

$$\text{XXXIV. } \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Und wenn man $\alpha + \beta = m$ setzt
und $\alpha - \beta = n$, und die Werthe von α

$$\text{und } \beta \text{ hieraus, d. h. } \alpha = \frac{m+n}{2}, \beta = \frac{m-n}{2}$$

in den vier letzt angeführten Gleichungen substituirt, so ist:

$$\text{XXXV.}$$

$$\sin m + \sin n = 2 \sin \left(\frac{m+n}{2} \right) \cos \left(\frac{m-n}{2} \right)$$

$$\text{XXXVI.}$$

$$\sin m - \sin n = 2 \cos \left(\frac{m+n}{2} \right) \sin \left(\frac{m-n}{2} \right)$$

$$\text{XXXVII.}$$

$$\cos m + \cos n = 2 \cos \left(\frac{m+n}{2} \right) \cos \left(\frac{m-n}{2} \right)$$

$$\text{XXXVIII.}$$

$$\cos n - \cos m = 2 \sin \left(\frac{m+n}{2} \right) \sin \left(\frac{m-n}{2} \right)$$

Aus IX. und X. erhält man durch Division:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta},$$

und aus IV.

$$\text{Tang. } (\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner des letzteren Ausdrucks durch $\cos \alpha \cos \beta$, und reducirt nach IV, so

$$\text{XXXIX. } \text{Tang. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{Tang. } \alpha + \text{Tang. } \beta}{1 - \text{Tang. } \alpha \text{ Tang. } \beta}.$$

Weil nach VIII. $\text{Cotang. } \alpha = \frac{1}{\text{Tang. } \alpha}$, so

$$\text{Cotang. } (\alpha + \beta) = \frac{1 - \text{Tang. } \alpha \cdot \text{Tang. } \beta}{\text{Tang. } \alpha + \text{Tang. } \beta} \quad \text{XXXX.}$$

Auf eine ähnliche Weise wie in XXXIX erhält man:

$$\text{Tang. } (\alpha - \beta) = \frac{\text{Tang. } \alpha - \text{Tang. } \beta}{1 + \text{Tang. } \alpha \cdot \text{Tang. } \beta} \quad \text{XXXXI.}$$

und hieraus wie oben:

$$\text{Cotang. } (\alpha - \beta) = \frac{1 + \text{Tang. } \alpha \cdot \text{Tang. } \beta}{\text{Tang. } \alpha - \text{Tang. } \beta}; \quad \text{XXXII.}$$

Aus XXXV, XXXVII, so wie aus XXXVI, XXXVIII. hat man:

$$\frac{\text{Sin. } m + \text{Sin. } n}{\text{Cos. } m + \text{Cos. } n} = \text{Tang. } \left(\frac{m + n}{2} \right) \quad \text{XXXIII.}$$

$$\frac{\text{Sin. } m - \text{Sin. } n}{\text{Cos. } n - \text{Cos. } m} = \text{Cotang. } \left(\frac{m + n}{2} \right) \quad \text{XXXIV.}$$

Aus XXXVI, XXXVII.

$$\frac{\text{Sin. } m - \text{Sin. } n}{\text{Cos. } m + \text{Cos. } n} = \text{Tang. } \left(\frac{m - n}{2} \right) \quad \text{XXXV.}$$

Ferner aus XXXV., XXXVI.:

$$\frac{\text{Sin. } m + \text{Sin. } n}{\text{Sin. } m - \text{Sin. } n} = \text{Tang. } \left(\frac{m + n}{2} \right) \text{Cotg. } \left(\frac{m - n}{2} \right)$$

und nach VIII.

$$\frac{\text{Sin. } m + \text{Sin. } n}{\text{Sin. } m - \text{Sin. } n} = \frac{\text{Tang. } \left(\frac{m + n}{2} \right)}{\text{Tang. } \left(\frac{m - n}{2} \right)}; \quad \text{XXXVI.}$$

Aus XXXI. XXXIII. so wie XXXI. XXXIV.

$$\text{XXXVII. } \frac{\sin. (a + \beta) + \sin. (a - \beta)}{\cos. (a + \beta) + \cos. (a - \beta)} = \text{Tang. } a.$$

$$\text{XXXVIII. } \frac{\sin. (a + \beta) + \sin. (a - \beta)}{\cos. (a - \beta) - \cos. (a + \beta)} = \text{Cotang. } \beta.$$

$$\text{II. } \text{Tang. } 2a = \frac{2 \text{ Tang. } a}{1 - (\text{Tang. } a)^2}, \text{ aus}$$

XXXIX., wo man $\beta = a$ setzt,

$$\text{L. } \text{Cotang. } 2a = \frac{1 - (\text{Tang. } a)^2}{2 \text{ Tang. } a}, \text{ aus}$$

II. und IV.

Es ist nicht schwer, aus den bisher angeführten Formeln noch viele andere abzuleiten, welche mehr oder minder zusammengesetzt sind. Die wichtigsten und, wie wir in der Folge sehen werden, zur Berechnung der trigonometrischen Linien für die einzelnen Winkel am meisten brauchbarsten, sind unter den angeführten 50 Formeln enthalten, so dass wir die weitere Entwicklung auf dem Wege der Combination, Substitution u. s. w. dem Nachdenken jedes Einzelnen überlassen können, ohne Gefahr zu laufen, etwas zur Sache wesentlich Gehöriges übergangen zu haben.

§. 21.

Von der Art und Weise, wie die trigonometrischen Linien jedes beliebigen Winkels berechnet werden können.

Aus zwei Gründen ergibt sich diese Berechnung leichter, als es Anfangs scheinen mag. Denn einmal sind uns mit der Angabe, wenn auch nur einer einzigen solchen trigonome-

trischen Linien eines bestimmten Winkels zugleich alle die übrigen desselben gegeben, und dann sind mit diesen Linien der Winkel von 0° bis zu 45° Grad unmittelbar auch alle jene der Winkel von beliebig viel Graden gefunden.

Durch geometrische Konstruktion findet man freilich nur wenige trigonometrische Linien; jedoch sind schon einige hinreichend, um mit Hilfe der oben angeführten Relationen die jedem Winkel entsprechenden Linien bestimmen zu können. Bevor wir aber zu dieser Konstruktion selbst schreiten, ist folgender Lehrsatz Behufs derselben vor auszuschicken.

L e h r s a t z.

Der Sinus eines Winkels ist der halben Sehne des doppelten Winkels gleich.

B e w e i s.

Halbirt man (Fig. 7.) den Winkel ACB durch CD, und zieht die Sehne AB, so steht solche nicht nur auf CD senkrecht, sondern wird auch durch CD halbirt. Da nun $AE = \text{Sin. ACD} = \text{Sin. DCB} = \text{Sin. } \frac{1}{2} \text{ ACB}$, $AB = \text{chord. ACB}$, so ist, wenn man $\angle \text{ACB} = 2 \alpha$ setzt,

$$\text{Sin. } \alpha = \frac{1}{2} \text{ chord. } 2 \alpha.$$

1. Zusatz. Durch obigen Satz ist man in den Stand gesetzt, den Sinus eines Winkels zu bestimmen, wenn man die Sehne des doppelten Winkels kennt.

2. Zusatz, Vielleicht ist es nicht unwahrscheinlich, dass mit dieser Eigenschaft des *Sinus* seine sonst unerklärbare Benennung zusammenhängt. Die Sehne hiess nämlich früher *inscripta*, also ihre Hälfte *semissis inscripta*, was abbreviirt geschrieben: *s.ins.* zu der jetzt gebräuchlichen Benennung geführt haben mag.

§. 22.

Wenn wir (Fig. 8.) den Radius des Kreises wiederum $= 1$ setzen, ergibt sich Folgendes:

1) wenn $\angle ACB = a = 45^\circ$.

Da $BD = DC$, oder $\text{Sin. } a = \text{Cos. } a$, so ist nach 1.:

$$2 (\text{Sin. } a)^2 = 1.$$

$$\text{Sin. } a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \text{Cos. } a.$$

$$\text{Sin. } 45^\circ = \text{Cos. } 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

2) wenn (Fig. 9.) $\angle ACB = 60^\circ$, so ist dessen Sehne AB dem Halbmesser gleich $= 1$, und die halbe Sehne BD ist der *Sinus* der Hälfte des Winkels ACB , d. i.

$$\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2} = \text{Cos. } 60^\circ.$$

$$\text{Da } CD^2 + BD^2 = 1.$$

$$DC^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1.$$

$$DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \text{ und } DC = \text{Cos. } BCD, \text{ so}$$

$$\text{Cos. } 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \text{Sin. } 60^\circ.$$

3) wenn $\angle BCE = 30^\circ$, so ist dessen Sehne

$$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2};$$

$$\text{Da nun } BD = \frac{1}{2}, BD^2 = \frac{1}{4}$$

$$DE = 1 - DC = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$DE^2 = 1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3} = \frac{7}{4} - \sqrt{3}, \text{ so}$$

$$BE = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \sqrt{3}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \text{ und}$$

$$BF = \sin. 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \cos. 75^\circ.$$

Ferner:

$$FC = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$BF = \cos. 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sin. 75^\circ.$$

4) wenn (Fig. 10.) $\angle ACB = 36^\circ$, so ist AB, oder die Seite des in den Kreis beschriebenen Zehnecks, die mittlere Proportionale zwischen AC und $AC - AB$, d. h.:

$$AB^2 = 1 \cdot (1 - AB)$$

$$AB^2 = 1 - AB$$

$$AB^2 + AB = 1.$$

$$AB = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$BD = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ oder}$$

$$\sin. 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos. 72^\circ.$$

Und da

$$(\sin. 18^\circ)^2 + (\cos. 18^\circ)^2 = 1$$

3 *

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{8} + (\text{Cos. } 18^\circ)^2 = 1, \text{ so ist}$$

$$\text{Cos. } 18 = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \text{Sin. } 72^\circ.$$

§. 23.

Schon diese durch geometrische Construction gefundenen Werthe einiger trigonometrischen Linien sind hinreichend, um alle dergleichen Linien jeglicher Winkel von Minute zu Minute für den Halbmesser = 1 zu berechnen.

In XI, XII setze man $\alpha = 18^\circ$, $\beta = 15^\circ$, und substituire ihre im vorigen § gefundenen Werthe, so erhält man den Werth von $\text{Sin. } 3^\circ$ und von $\text{Cos. } 3^\circ$.

Substituirt man diese letztgefundenen Werthe für u in XXI, XXII, so findet man den Werth des Sin. und Cos. von $1\frac{1}{2}$ Grad, oder 90 Minuten, und wenn man auf diese Weise, dass man nämlich stets die zuletzt gefundenen Werthe von u in XXI, XXII setzt, fortfährt, so erhält man:

$$\text{Sin. } \frac{45'}{32} = 0,00040906153 \dots$$

$$\text{Sin. } \frac{45'}{64} = 0,00020453077 \dots$$

Aus beiden letzten Werthen ist ersichtlich, dass für so kleine Winkel die zugehörigen Sinus sich wie ihre Bögen oder Winkel selbst verhalten, da der Sinus des doppelten Bogens nur um ein

einziges hundert tausend Millionen - Theilchen des Halbmessers kleiner ist als der *Sinus* des einfachen Bogens; und desswegen kann man ohne merklichen Fehler setzen:

$$\frac{45'}{64} : 1' = 0,00020453077 : \text{Sin. } 1'$$

$$\text{Sin. } 1' = 0,0002009 \dots$$

$$\text{Cos. } 1' = \sqrt{1 - (0,0002009 \dots)^2}.$$

Dadurch ist man nun in den Stand gesetzt, aus XIII, XIV, XXV, XXVI u. s. w. die *Sinus* und *Cosinus* (und mit ihnen die andern trigonometrischen Linien) aller Winkel von Minute zu Minute zu bestimmen, wobei es hauptsächlich zur Erleichterung der Rechnung auf eine geschickte Auswahl der oben angeführten Relationen ankommt.

Hat man z. B. die Werthe von *Sinus* und *Cos.* aller Winkel von $1'$ bis 30° gefunden, so ergeben sich die Werthe derselben bis zu 45° , welche bloß noch zu bestimmen übrig sind, durch eine einfache Subtraction. Setzt man nämlich in die Formeln XXXI, XXXIV, $\alpha = 30$, und für $\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } 30^\circ$ seinen Werth $= \frac{1}{2}$, so hat man:

$$\text{Sin. } (30 + \beta) + \text{Sin. } (30 - \beta) = \text{Cos. } \beta$$

$$\text{Cos. } (30 + \beta) - \text{Cos. } (30 - \beta) = -\text{Sin. } \beta,$$

oder:

$$\text{Sin. } (30 + \beta) = \text{Cos. } \beta - \text{Sin. } (30 - \beta)$$

$$\text{Cos. } (30 + \beta) = \text{Cos. } (30 - \beta) - \text{Sin. } \beta,$$

welche Werthe, da $\text{Sin. } (30 - \beta)$, $\text{Cos. } (30 - \beta)$ bereits gefunden sind, man demnach durch eine einfache Subtraction leicht erhält,

Im Obigen sollte nur die Möglichkeit angedeutet werden, wie die trigonometrischen Linien für jeden Winkel berechnet werden können, ohne damit sagen zu wollen, dass die Berechnung also geschehen müsse. Diese ergibt sich viel leichter durch die höhere Analysis, wo gewisse Formeln entwickelt sind, durch welche man den Sinus und Cosinus eines jeden Winkels unmittelbar aus seiner zugehörigen Bogenlänge findet.

§. 24.

Wir haben bisher der Einfachheit halber alle trigonometrische Relationen als zu Winkeln gehörig betrachtet in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1$, und auch die Berechnung der trigonometrischen Linien in dieser Voraussetzung vorgenommen. Durch folgenden Satz können wir jedoch alle diese trigonometrischen Funktionen für jeden beliebigen Halbmesser brauchbar machen:

L e h r s a t z.

Gleichnamige, trigonometrische Linien eines und desselben Winkels verhalten sich zu einander wie die Halbmesser der Kreise, in welchen sie gezogen werden.

B e w e i s.

Man ziehe (Fig. 11.) die gewöhnlichen trigonometrischen Linien des Winkels $BCA = a$, sowohl für den Halbmesser $CE = CF = CL = r$, als den Halbmesser $CB = AC = CM = R$, so hat man aus der Aehnlichkeit der verschiedenen Dreiecke:

$EG : BD = CE : CB$, d. i. $\sin. \alpha : \sin. \alpha = r : R$
 $CG : CD = CE : CB$, d. i. $\cos. \alpha : \cos. \alpha = r : R$
 $FH : AJ = CF : CA$, d. i. $\tan. \alpha : \tan. \alpha = r : R$
 $KL : MN = CL : CM$, d. i. $\cotg. \alpha : \cotg. \alpha = r : R$
 $CH : CJ = CF : CA$, d. i. $\sec. \alpha : \sec. \alpha = r : R$
 $CK : CN = CL : CM$, d. i. $\csc. \alpha : \csc. \alpha = r : R$,
 woraus die Wahrheit obigen Satzes deutlich er-
 sichtlich.

§. 25.

In den trigonometrischen Tafeln, deren wir
 uns gewöhnlich bedienen, sind die trigonometri-
 schen Linien für die verschiedenen Winkel so berech-
 net, als wären sie in einem Kreise gezogen, des-
 sen Halbmesser = 10000000000, oder, da nicht
 die Linien ihrer Grösse nach selbst, sondern nur
 die zugehörigen Logarithmen gegeben sind, des-
 sen Halbmesser in unseren gewöhnlichen Tafeln
 die Zahl 10 zum Logarithmus hat. *)

Will man nun irgend eine für diesen Halb-
 messer, den wir mit R bezeichnen wollen, berech-
 nete trigonometrische Relation in eine für irgend
 einen andern Halbmesser, z. B. für 1 gültige um-
 formen, so hat man

$$\sin \alpha : \sin. \alpha = 1 : R,$$

$$\sin. \alpha = \frac{\sin. \alpha}{R},$$

*) Die Logarithmen der trigonometrischen Linien sind
 deshalb gegeben, und nicht ihre wirkliche Grösse,
 weil die meisten trigonometrischen Rechnungen am
 kürzesten mit Logarithmen gemacht werden.

$\log. \sin. a = \log. \text{Sin. } a - \log. R,$
 d. h. die Logarithmen der für den Halbmesser 10000000000 berechneten trigonometrischen Linien können für den Halbmesser 1 brauchbar gemacht werden, wenn man von dem treffenden Logarithmus einer also berechneten Linie den Logarithmus von R , d. i. 10,00000000 abzieht.

Für einen andern Halbmesser, zum Beispiel $= r$, werden sie brauchbar, wenn man zum Logarithmus der trigonometrischen Function den Log. von r addirt, und erst von dieser Summe den Log. 10000000000, d. i. 10,00000000 abzieht, wie sich aus folgender Proportion ergibt:

$$\sin. a : \text{Sin. } a = r : R$$

$$\sin. a = \frac{r. \text{Sin. } a}{R}.$$

$$\log. \sin. a = \log r + \log. \text{Sin. } a - \log. R.$$

Der Log. der Differenz gibt den Log. der trigonometrischen Function für den Halbmesser r , welche demnach selbst ihrer Grösse nach durch Hilfe der logarithmischen Tafeln gefunden werden kann.

In diesen logarithmischen Tafeln, in welchen für jeden Winkel zunächst nur die am häufigsten in Anwendung kommenden trigonometrischen Linien: Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente berechnet sind, ist gewöhnlich schon das Nothwendige über deren Einrichtung und Gebrauch vorangeschickt. Da solche sich nun in den Händen jedes, der sich mit Trigonometrie beschäftigt, befinden müssen, so sehen wir uns dieser Erläuterung

überhoben und verweisen bloß darauf hin. Vegas logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, das bereits die 14. Auflage erlebte, und die Logarithmen der trigonometrischen Linien bis auf 7 Decimalstellen genau angibt, möchte jedem zu empfehlen seyn, zumal da der neueste Preis desselben nur $2\frac{1}{4}$ fl. ist, und Druck und Papier nichts zu wünschen übrig lassen.

II. A b s c h n i t t.

Ebene Trigonometrie.

§. 26.

Unsere Aufgabe ist es, im gegenwärtigen Abschnitt zu zeigen, *wie durch Hilfe der berechneten trigonometrischen Linien es möglich ist, aus 3 gegebenen Stücken eines Dreiecks, worunter aber wenigstens eine Seite seyn muss, die übrigen durch Rechnung zu finden.*

A. Das rechtwinklige Dreieck.

Bezeichnen wir in der Folge die Ecken oder Winkel eines Dreiecks mit beliebigen Buchstaben, die denselben gegenüberliegenden Seiten aber mit den gleichen Buchstaben des kleineren, lateinischen Alphabets, so dass man z. B. in jedem Dreiecke die 6 Stücke desselben mit A, B, C, a, b, c bezeichnet, so sind beim rechtwinkligen Dreieck

wegen des schon als bekannt vorausgesetzten rechten Winkels ausser demselben schon zwei Stücke, worunter sich jedoch eine Seite befinden muss, hinreichend, die andern daraus zu bestimmen.

Die verschiedenen Fälle, welche hier vorkommen können, finden in folgenden vier Aufgaben ihre Lösung.

§. 27.

Erste Aufgabe.

Im rechtwinkligen Dreieck ABC sey gegeben der spitze Winkel B und die Hypotenuse $BC = a$. Man soll die übrigen Stücke des Dreiecks bestimmen.

L ö s u n g.

Aus dem Scheitel des gegebenen Winkels B (Fig. 12.) denke man sich mit dem Halbmesser $BD = R =$ dem in den Logarithmen-Tafeln zu Grunde gelegten Halbmesser, den Bogen DE beschrieben, und fälle aus D auf AB die Senkrechte DF, so hat man für diesen Halbmesser : $DF = \text{Sin. } B$, $BF = \text{Cosin. } B$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BDF, ABC aber

$$BD : BC = DF : AC, \text{ oder}$$

$$R : a = \text{Sin. } B : AC; \text{ woraus}$$

$$AC = b = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{R};$$

Ferner:

$$BD : BC = BF : AB, \text{ oder}$$

$$R : a = \text{Cos. } B : AB; \text{ woraus}$$

$$AB = c = \frac{a \text{ Cos. } B}{R};$$

Den Winkel C, als das dritte noch unbekannte Stück des zu bestimmenden Dreiecks, findet man durch die Gleichung : $C = 90^\circ - B$.

Zusatz. In obiger Aufgabe findet auch diejenige ihre Lösung, wo statt des Winkels B der Winkel C und die Hypotenuse $BC = a$ gegeben ist. Beschreibt man nämlich aus C mit dem Halbmesser R der Tafeln einen Bogen und verfährt wie oben, so erhält man

$$R : a = \text{Sin. } C : AB$$

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } C}{R};$$

$$R : a = \text{Cos. } C : AC$$

$$AC = \frac{a \text{ Cos. } C}{R}.$$

B e i s p i e l.

Im Dreiecke ABC (Fig. 12.) sey gegeben $\angle B = 40^\circ 45'$ und $BC = a = 480'$.

Nach Obigem ist

$$AC = b = \frac{a \text{ Sin. } B}{R} = \frac{480 \text{ Sin. } 40^\circ 45'}{10000000000}$$

$$\text{Nun ist log. } 480 = 2,6812412.$$

$$\text{log. Sin. } 40^\circ 45' = 9,8147534$$

$$\hline 12,4959946$$

$$\text{log. } 10000000000 = 10,0000000$$

$$\text{log. } b = 2,4959946$$

$$b = 313',32 \dots$$

$$AB = c = \frac{a. \cos. B}{R} = \frac{480. \cos. 40^\circ 45'}{10000000000}$$

$$\log. 480 = 2,6812412$$

$$\log. \cos. 40^\circ 45' = 9,8794199$$

$$\hline 12,5606611$$

$$\log. 10000000000 = 10,0000000$$

$$\log. c = 2,5606611$$

$$c = 363',63.$$

$\angle C = 90^\circ - 40^\circ 45' = 49^\circ 15'$, und alle Stücke des Dreiecks sind demnach bekannt.

§. 28.

Zweite Aufgabe.

Im rechtwinkligen Dreieck ABC sey gegeben der Winkel B und die Kathete $AB = c$. Man bestimme die übrigen Stücke des Dreiecks.

L ö s u n g.

Aus der Spitze des gegebenen Winkels B denke man sich wiederum (Fig. 13.) mit dem Halbmesser $BD = R$ — dem in den Logarithmentafeln zu Grunde gelegten, den Bogen DF beschrieben, und errichte im Punkte D auf AB die Senkrechte DE, so ist $DE = \text{Tang. } B$, $BE = \text{Sec. } B$; und man hat aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BDE, ABC,

$$BD : AB = DE : AC, \text{ oder}$$

$$R : c = \text{Tang. } B : AC$$

$$AC = b = \frac{c. \text{Tang. } B}{R};$$

$$BD : AB = BE : BC, \text{ oder}$$

$$R : c = \text{Sec. } B : BC, \text{ oder}$$

$$BC = a = \frac{c \cdot \text{Sec. } B}{R}, \text{ oder nach V.}$$

$$BC = a = \frac{c \cdot R}{\text{Cos. } B};$$

$$\text{Der Winkel } C = 90^\circ - B.$$

B e i s p i e l.

Im obigen Dreiecke sey gegeben $\angle B = 36^\circ 24'$
und $AB = c = 360'$, so hat man

$$AC = b = \frac{c \cdot \text{Tang. } B}{R} = \frac{360 \cdot \text{Tang. } 36^\circ 24'}{10000000000}$$

$$\log. 360 = 2,5563025$$

$$\log. \text{Tang. } 36^\circ 24' = 9,8676228$$

$$\hline 12,4239253 - 10$$

$$\log. b = 2,4329253$$

$$b = 265',41. \dots$$

$$BC = a = \frac{c \cdot R}{\text{Cos. } A} = \frac{360 \cdot 10000000000}{\text{Cos. } 36^\circ 24'}$$

$$\log. 360 = 2,5563025$$

$$\log. R = 10,0000000$$

$$\hline 12,5563025$$

$$\log. \text{Cos. } 36^\circ 24' = 9,9057386$$

$$\log. a = 2,6505639$$

$$a = 44'7,26. \dots$$

$$\angle C = 90^\circ - 36^\circ 24' = 53^\circ 36'.$$

§. 29.

Dritte Aufgabe.

Im rechtwinkligen Dreieck ABC seyen
die zwei Katheten $AB = c$, $AC = b$ gegeben.
Man soll die übrigen Stücke des Dreiecks be-
stimmen.

L ö s u n g.

Wie in der ersten Aufgabe beschreibe man (Fig. 12.) den Kreisbogen DE und fälle von D auf AB das Perpendikel DF, so ist $DF = \text{Sin. } B$, $BF = \text{Cosin. } B$, und man hat, weil $\triangle BDF \sim \triangle ABC$,

$$BF : AB = DF : AC$$

$$\text{Cos. } B : c = \text{Sin. } B : b$$

$$c. \text{Sin. } B = b. \text{Cos. } B$$

$$\frac{\text{Sin. } B}{\text{Cos. } B} = \frac{b}{c},$$

$$\text{Tang. } B = \frac{b}{c},$$

woraus man den Winkel B, und durch diesen den Winkel $C = 90^\circ - B$ findet.

Die Hypotenuse $BC = a$ bestimmt man aus der Gleichung $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, oder, wenn man bereits den Winkel B gefunden, aus der Proportion

$$BD : BC = DF : AC$$

$$R : a = \text{Sin. } B : b$$

$$a = \frac{R. b}{\text{Sin. } B}.$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $AB = c = 250'$, $AC = b = 300'$, so ist:

$$\text{Tang. } B = \frac{b}{c} = \frac{300}{250}$$

$$\log. 300 = 2,4771213$$

$$\log. 250 = 2,3979400$$

$$\log. \text{Tang. } B = 0,0791813$$

Der diesem Ausdruck entsprechende Werth von $\angle B$ gilt von einem Kreise, dessen Halbmesser = 1. angenommen wurde. Soll er, wie schon §. 25. bemerkt, in einen für den Halbmesser der Tafel gültigen umgeformt werden, so hat man zum Logarithmus obiger gefundenen trigonometrischen Function den Logarithmus des Halbmessers der Tafeln, d. i. 10,0000000 zu addiren. Und es ist demnach:

$$\log. \text{Tang } B = 10,0791813$$

$$\angle B = 50^\circ 11' 40''$$

Daraus ist

$$\angle C = 39^\circ 48' 20''$$

$$a = \frac{R. b}{\text{Sin. } B}$$

$$\log. b = 2,4771213$$

$$\log. R = 10,0000000$$

$$\hline 12,4771213$$

$$\log. \text{Sin. } B = 9,8854864$$

$$\log. a = 2,5916349$$

$$a = 390, ' 51 \dots, \text{ welchen}$$

Werth von a man auch sogleich aus dem Ausdrucke

$$a = \sqrt{(300)^2 + (250)^2} \text{ findet.}$$

§. 30.

Vierte Aufgabe.

Aus der Hypothenuse $BC = a$, und der Kathete $AB = c$ eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu bestimmen.

L ö s u n g.

Verfährt man wie in der ersten Aufgabe, so hat man (Fig. 12.)

$$BD : BF = BC : AB$$

$$R : \text{Cos. } B = a : c$$

$$\text{Cos. } B = \frac{R \cdot c}{a},$$

woraus man den Winkel B, und durch ihn den zweiten spitzen Winkel C findet.

Die andere Kathete $AC = b$ bestimmt man aus der Gleichung $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, oder, wenn man bereits den Winkel B gefunden, aus

$$BD : BC = DF : AC$$

$$R : a = \text{Sin. } B : b$$

$$b = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{R}.$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $BC = a = 400'$ und $AB = c = 256'$, so ist

$$\text{Cos. } B = \frac{R \cdot c}{a}$$

$$\log. c = 2,4082400$$

$$\log. R = 10,0000000$$

$$\hline 12,4082400$$

$$\log. a = 2,6020600$$

$$\log. \text{Cos. } B = 9,8061800$$

$$\angle B = 50^\circ 12' 30''.$$

$$\text{Folglich } \angle C = 39^\circ 47' 30''.$$

$$b = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{R}$$

$$\log. a = 2,6020600$$

$$\log. \text{Sin. } B = 9,8855741$$

$$\hline 12,4876341$$

$$\log. R = 10,0000000$$

$$\log. b = 2,4876341$$

$$b = 307',35 \dots$$

§. 31.

Aus der Betrachtung obiger vier Aufgaben ergeben sich für das rechtwinklige Dreieck ABC, wenn AB dessen Grundlinie und AC dessen Höhe genannt wird, folgende Relationen:

- 1) Die Hypotenuse verhält sich zur Höhe, wie der Halbmesser eines Kreises zum Sin. des der Höhe gegenüberliegenden Winkels in demselben Kreise.

Zusatz: Man nennt diesen Satz die Sinus-Regel und wendet sie stets an, wenn die Hypotenuse berechnet werden soll.

- 2) Die Hypotenuse verhält sich zur Grundlinie, wie der Halbmesser eines Kreises zum Cos. des von beiden eingeschlossenen Winkels in demselben Kreise.

- 3) Die Grundlinie verhält sich zur Höhe, wie der Cos. eines Winkels zum Sin. desselben, oder wie der Halbmesser eines Kreises zur Tangente des der Höhe gegenüberliegenden Winkels in demselben Kreise.

Zusatz: Der zweite Theil des dritten Satzes heisst die Tangenten-Regel, und sie kommt stets in Anwendung, wenn die Hypotenuse nicht in die Rechnung gezogen wird.

B. Das schiefwinklige Dreieck.

§. 32.

Behalten wir auch hier, beim schiefwinkligen Dreieck, dieselbe Bezeichnung der Seiten und

Winkel bei, wie beim rechtwinkligen, so sehen wir leicht, dass in der Lösung folgender vier Aufgaben, wenn nämlich gegeben ist: A, B, a ; A, a, b ; A, b, c ; a, b, c zugleich die Lösung aller der übrigen, die sich aus den 6 gegebenen Stücken durch die Combination zu je dreien ergeben, enthalten sey.

Bevor wir aber zur Lösung dieser Aufgaben selbst schreiten, ist der nächste Lehrsatz wohl ins Auge zu fassen, auf welchem die ganze Trigonometrie beruht, indem durch ihn und den bekannten Satz, dass die drei Winkel eines Dreiecks $= 180^\circ$, unmittelbar alle bei der Berechnung der Dreiecke vorkommenden Fälle bis auf zwei aufgelöst, diese aber selbst wiederum leicht auf die übrigen zurückgebracht werden. Da dieser Satz für jedes Dreieck Gültigkeit hat, so können auch die rechtwinkligen darnach behandelt werden, so dass es nicht gerade nothwendig ist, sie abgesondert zu betrachten, wie es nur grösserer Deutlichkeit wegen in den vorhergehenden §. von uns geschah.

§. 33.

L e h r s a t z.

In jedem Dreieck verhalten sich zwei Seiten zu einander wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel, d. i.

$$a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B;$$

$$a : c = \text{Sin. } A : \text{Sin. } C;$$

$$b : c = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C;$$

B e w e i s.

Nach §. 31. hat man in Fig. 14., wo von der Spitze des schiefwinkligen Dreiecks ABC auf die gegenüberliegende Seite das Perpendikel CD gefällt ist,

$$CD = b. \sin. A,$$

$$CD = a. \sin. B;$$

woraus folgt

$$a. \sin. B = b. \sin. A;$$

oder

$$a : b = \sin. A : \sin. B.$$

Fällt man von B auf AC, und von A auf BC gleichfalls Perpendikel, und macht gleiche Schlüsse wie im Vorhergehenden, so erhält man eben so:

$$a : c = \sin. A : \sin. C,$$

$$b : c = \sin. B : \sin. C,$$

woraus die Wahrheit des ausgesprochenen, für die Trigonometrie so wichtigen Lehrsatzes hervorgeht. Die beiden ersten der folgenden Aufgaben lassen sich unmittelbar durch Hilfe desselben lösen.

§. 34.

A u f g a b e.

Von dem Dreiecke ABC (Fig. 14.) seyen gegeben zwei Winkel und eine Seite, die einem dieser Winkel gegenüber liegt, z. B. die Winkel A, B, und die Seite a. Man bestimme die übrigen Stücke des Dreiecks.

L ö s u n g.

Den dritten Winkel C des Dreiecks erhält man durch die Gleichung $C = 180^\circ - (A + B)$, die beiden zu bestimmenden Seiten aber nach dem vorhergehenden Lehrsatz durch die Proportionen:

$$a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B,$$

$$a : c = \text{Sin. } A : \text{Sin. } C, \text{ woraus}$$

$$b = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A},$$

$$c = \frac{a \cdot \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A}$$

B e i s p i e l.

Es sey $\angle A = 56^\circ 24' 20''$, $\angle B = 48^\circ 32' 25''$
und die Seite $BC = a = 648'$.

Man hat $\angle C = 180^\circ - \angle (A + B) = 75^\circ 3' 15''$.

$$b = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A}$$

$$\log. a = 2,8115750.$$

$$\log. \text{Sin. } B = 9,8747260$$

$$\hline 12,6863010$$

$$\log. \text{Sin. } A = 9,9206319$$

$$\log. b = 2,7656691$$

$$b = 583',00..$$

Eben so

$$c = \frac{a \cdot \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A}$$

$$\log. a = 2,8115750$$

$$\log. \text{Sin. } C = 9,9850536$$

$$\hline 12,7966286$$

$$\log. \text{Sin. } A = 9,9206319$$

$$\log. c = 2,8759967$$

$$c = 751',61..$$

§. 35.

A u f g a b e,

Vom Dreieck ABC (Fig. 14.) seyen gegeben zwei Seiten und ein Winkel, welcher einer von diesen Seiten gegenüber liegt; z. B. die Seiten a, b , und der Winkel A . Man soll die übrigen Stücke des Dreiecks finden.

L ö s u n g.

Aus

$$a : b = \sin. A : \sin. B$$

erhält man

$$\sin. B = \frac{b \cdot \sin. A}{a}$$

In diesem Ausdrücke liegt jedoch in Beziehung auf den Winkel B eine Zweideutigkeit. Es fragt sich nämlich, ob man nach gemachter Rechnung für B den spitzigen oder stumpfen Winkel, welchen beiden der für B gefundene Werth entspricht, wählen soll. Diese Zweideutigkeit rührt von der Eigenschaft der Dreiecke selbst her, indem, wie aus Fig. 15. ersichtlich, aus den gegebenen drei Stücken verschiedene Dreiecke ABC , $A'BC$ verzeichnet werden können.

Sie würde für alle Fälle gehoben seyn, wenn sich der Winkel B noch durch eine andere trigonometrische Linie, die durch ihre Bezeichnung die Sache entscheiden würde, z. B. durch den *Cosinus*, bestimmen liesse. Da diess nicht möglich, so

bleibt die Zweideutigkeit, ausser in dem Fall, wo der Winkel A spitzig und die Seite a grösser als b ist, indem alsdann der fragliche Winkel B jedenfalls spitzig genommen werden muss.

Ist Winkel B bestimmt, so findet man den noch übrigen dritten $\angle$ C leicht durch die Gleichung $C = 180^\circ - (A + B)$, und die dritte Seite c durch die Proportion:

$$a : c = \sin. A : \sin. C,$$

woraus

$$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $a = 445'$, $b = 370'$ und $\angle A = 48^\circ 12'$, so hat man

$$\sin. B = \frac{b \sin. A}{a}$$

$$\log. b = 2,5682017$$

$$\log. \sin. A = 9,8724337$$

$$\hline 12,4406354$$

$$\log. a = 2,6483600$$

$$\log. \sin. B = 9,7922754$$

$$\angle B = 38^\circ 18' 14''$$

Daraus findet man

$$\angle C = 180 - \angle (A + B) = 93^\circ 29' 46''$$

und die dritte Seite,

$$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}$$

$$\log. a = 2,6483600$$

$$\log. \sin. C = 9,9991910$$

$$\hline 12,6475510$$

$$\log. \sin. A = 9,8724337$$

$$\log. c = 2,7751173$$

$$c = 595',82.$$

§. 36.

A u f g a b e.

Vom Dreiecke ABC (Fig. 14.) seyen gegeben zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; z. B. die Seiten b, c und der Winkel A . Man soll die übrigen Stücke des Dreiecks finden.

L ö s u n g.

Unmittelbar ist die Lösung dieser Aufgabe nicht in dem von uns als Hauptsatz der Trigonometrie aufgestellten Lehrsatz enthalten, indem uns beide, den gegebenen Seiten gegenüberstehende, Winkel unbekannt sind; allein durch eine kurze algebraische Operation erhalten wir sie aus eben demselben Satze.

Man hat (Fig. 14.)

$$a. \sin. B = b. \sin. A, \text{ und}$$

$$AD = b. \cos. A,$$

$$BD = a. \cos. B = c - AD = c - b. \cos. A,$$

also

$$a. \cos. B = c - b. \cos. A,$$

Quadriert man zwei dieser Gleichungen auf jeder Seite, so erhält man

$$a^2. (\sin. B)^2 = b^2. (\sin. A)^2$$

$$a^2. (\cos. B)^2 = c^2 - b^2. (\cos. A)^2 - 2bc \cos. A$$

welche addirt die Gleichung geben

$$a^2. ((\sin. B)^2 + (\cos. B)^2) = c^2 + b^2$$

$$((\sin. A)^2 + (\cos. A)^2) - 2bc \cos. A.$$

Da aber $(\text{Sin. } A)^2 + (\text{Cos. } A)^2 = (\text{Sin. } B)^2 + (\text{Cos. } B)^2 = 1$, so erhält man endlich:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{Cos. } A, \text{ und eben so der Analogie nach:}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \text{Cos. } B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos. } C,$$

woraus man demnach die dritte Seite eines Dreiecks findet, wenn die zwei andern und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben ist. Allein leider sind obige Formeln für den praktischen Gebrauch nicht bequem, weil sie sich nur zum Theil logarithmisch behandeln lassen; wir werden desshalb von ihnen erst später, in der folgenden Aufgabe, wo wir sie für die Rechnung geschmeidiger machen können, Gebrauch machen, und suchen uns aus eben demselben Hauptsatze andere, bequemere Formeln für die Lösung unserer Aufgabe abzuleiten, und zwar dadurch, dass wir einen der beiden unbekannten Winkel vorerst bestimmen.

Man hat:

$$\text{Sin. } B : \text{Sin. } C = b : c, \text{ woraus}$$

$$\text{Sin. } B + \text{Sin. } C : \text{Sin. } B - \text{Sin. } C = b + c : b - c$$

oder

$$\frac{\text{Sin. } B + \text{Sin. } C}{\text{Sin. } B - \text{Sin. } C} = \frac{b + c}{b - c};$$

Aber nach XXXXVII hat man

$$\frac{\text{Sin. } B + \text{Sin. } C}{\text{Sin. } B - \text{Sin. } C} = \frac{\text{Tang. } \frac{B + C}{2}}{\text{Tang. } \frac{B - C}{2}},$$

und deshalb

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\text{Tang. } \frac{B + C}{2}}{\text{Tang. } \frac{B - C}{2}}, \text{ oder}$$

$$b + c : b - c = \text{Tang. } \frac{B + C}{2} : \text{Tang. } \frac{B - C}{2}$$

$$\text{Da nun } \frac{B + C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}A,$$

so ist $\text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2}A) = \text{Cotang. } \frac{1}{2}A$, und man hat

$$b + c : b - c = \text{Cotang. } \frac{1}{2}A : \text{Tang. } \frac{B - C}{2},$$

$$\text{Tang. } \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \text{ Cotang. } \frac{1}{2}A,$$

woraus also die Differenz der Winkel B und C gefunden wird. Ihre Summe ist aber auch bekannt, und folglich kann jeder einzelne leicht bestimmt werden. Ist diess geschehen, so erhält man die dritte Seite am bequemsten durch die Proportion:

$$a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B$$

$$a = \frac{b \cdot \text{Sin. } A}{\text{Sin. } B}.$$

Zusatz. Man kann auch jede der unbekannten Winkel unmittelbar also finden. Es ist nach dem Vorhergehenden

$$a \cdot \text{Sin. } B = b \cdot \text{Sin. } A$$

$$a \cdot \text{Cos. } B = c - b \cdot \text{Cos. } A;$$

Dividirt man beide, so erhält man

$$\text{Tang. } B = \frac{b \cdot \text{Sin. } A}{c - b \cdot \text{Cos. } A} \text{ und der Analo-}$$

gie nach

$$\text{Tang. } C = \frac{c \cdot \text{Sin. } A}{b - c \cdot \text{Cos. } A};$$

welche Formeln aber für die Logarithmen-Rechnung ebenfalls etwas unbequem sind.

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $b = 1836'$, $c = 1260'$ und der Winkel $A = 42^\circ 15' 40''$, so ist $B + C = 180^\circ - A = 137^\circ 44' 20''$, $\frac{1}{2} A = 21^\circ 7' 50''$, $b + c = 3096'$, $b - c = 576'$, und man hat:

$$\text{Tang. } \frac{B - C}{2} = \frac{576}{3096} \text{Cotang. } \frac{1}{2} A$$

$$\log. 576 = 2,7604225$$

$$\log. \text{Cotg. } \frac{1}{2} A = 10,4128722$$

$$\hline 13,1732947$$

$$\log. 3096 = 3,4908010$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{B - C}{2} = 9,6824937$$

$$\frac{B - C}{2} = 25^\circ 42' 20''$$

$$B - C = 51^\circ 24' 40''$$

Aus den beiden Gleichungen

$$B + C = 137^\circ 44' 20''$$

$$B - C = 51^\circ 24' 40''$$

erhält man jeden einzelnen Winkel, nämlich

$$B = \frac{137^\circ 44' 20'' + 51^\circ 24' 40''}{2} = 94^\circ 34' 30''$$

$$C = \frac{137^{\circ} 44' 20'' - 51^{\circ} 24' 40''}{2} = 43^{\circ} 9' 50''$$

Die dritte Seite aus

$$a = \frac{b \cdot \sin. A.}{\sin. B}$$

$$\log. b = 3,2638727$$

$$\log. \sin. A = 9,8276990$$

$$\hline 13,0915717$$

$$\log. \sin. B = 9,9986140$$

$$\log. a = 3,0929677$$

$$a = 1238,60 \dots$$

§. 37.

A u f g a b e.

Vom Dreiecke seyen alle 3 Seiten: a , b , c gegeben. Man soll die Winkel desselben bestimmen.

L ö s u n g.

Aus den in der vorigen Aufgabe anfänglich entwickelten Formeln

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cdot \cos. A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 ac \cdot \cos. B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cdot \cos. C$$

erhält man folgende:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}$$

$$\cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 ac}$$

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 ab},$$

welche die Lösung unserer Aufgabe vollkommen enthalten.

Durch folgende Veränderungen werden sie auch für den logarithmischen Calcul, für welchen sie in obiger Form unbequem sind, brauchbar gemacht.

Da

$$\text{Cos. } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}$$

so hat man auch

$$\begin{aligned} 1 + \text{Cos. } A &= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc} \\ &= \frac{2 bc + b^2 + c^2 - a^2}{2 bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2 bc} \\ &= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2 bc}; \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ist

$$\begin{aligned} 1 - \text{Cos. } A &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc} = \frac{2 bc - b^2 - c^2 + a^2}{2 bc} \\ &= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2 bc} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2 bc}; \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{1 - (\text{Cos. } A)^2}{(\text{Sin. } A)^2} = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)}{4 b^2 c^2}$$

$$\text{Sin. } A = \frac{1}{2 bc} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)};$$

und der Analogie nach

$$\sin. B = \frac{1}{2ac} V \overline{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

$$\sin. C = \frac{1}{2ab} V \overline{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

welche Gleichungen man ganz logarithmisch behandeln kann. Eine noch einfachere Gestalt erhalten sie, wenn man

$a + b + c = 2S$ setzt. Alsdann ist

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2S - 2c$$

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2S - 2b$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2S - 2a,$$

und man hat

$$\sin. A = \frac{1}{2bc} V \overline{2S \cdot (2S - 2c) (2S - 2b) (2S - 2a)}$$

$$= \frac{1}{2bc} V \overline{2S \cdot 2(S - c) 2(S - b) 2(S - a)},$$

und endlich:

$$\sin. A = \frac{2}{bc} V \overline{S \cdot (S - a) (S - b) (S - c)}$$

$$\sin. B = \frac{2}{ac} V \overline{S \cdot (S - a) (S - b) (S - c)}$$

$$\sin. C = \frac{2}{ab} V \overline{S \cdot (S - a) (S - b) (S - c)}.$$

Zusatz. Noch andere bequeme Formeln zur Lösung unserer Aufgabe erhält man auch also:

Es ist:

$$1 - \cos. A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}$$

Da nun nach XXIII. $1 - \text{Cosinus } A = 2 (\text{Sin. } \frac{1}{2} A)^2$,

$$a + b - c = 2 S - 2c, = 2 (S - c)$$

$$a + c - b = 2 S - 2b, = 2 (S - b)$$

so ist auch

$$2 (\text{Sin. } \frac{1}{2} A)^2 = \frac{2 (S - c) \cdot 2 (S - b)}{2 bc}$$

$$(\text{Sin. } \frac{1}{2} A)^2 = \frac{(S - c) \cdot (S - b)}{bc}$$

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{(S - c) \cdot (S - b)}}{\sqrt{bc}}; \text{ und}$$

der Analogie nach

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} B = \frac{\sqrt{(S - a) \cdot (S - c)}}{\sqrt{ac}},$$

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{(S - a) \cdot (S - b)}}{\sqrt{ab}};$$

Oder aber

$$1 + \text{Cos. } A = \frac{(a + b + c) \cdot (b + c - a)}{2 bc}$$

Nach XXIV.

$$1 + \text{Cos. } A = 2 (\text{Cos. } \frac{1}{2} A)^2.$$

$$b + c - a = 2 S - 2a = 2 (S - a),$$

desshalb ist

$$2 (\text{Cos. } \frac{1}{2} A)^2 = \frac{2 S \cdot 2 (S - a)}{2 bc} = \frac{2 S \cdot (S - a)}{bc}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{S \cdot (S - a)}}{\sqrt{bc}}, \text{ und der Ana-}$$

logie nach

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} B = \frac{V S. (S - b)}{V_{ac}}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} C = \frac{V S. (S - c)}{V_{ab}};$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $a = 260'$, $b = 235'$, $c = 325'$,
so ist

$$S = \frac{260 + 235 + 325}{2} = 410$$

$$S - a = 150$$

$$S - b = 175$$

$$S - c = 85, \text{ und man hat}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} A = \frac{V S. (S - a)}{V_{b.c}}$$

$$\log. S = 2,6127839$$

$$\log. (S - a) = 2,1760913$$

$$\hline 6,7888752 - 2$$

$$\log. b = 2,3710679$$

$$\log. c = 2,5118834$$

$$\hline 4,8829513$$

$$\hline 2/1,9059239 - 2$$

$\log. \text{Cos. } \frac{1}{2} A = 0,9529619 - 1$, für $r = 1$; dem-
nach für den Halbmesser der Tafeln,

$$\log. \text{Cos. } \frac{1}{2} A = 9,9529619$$

$$\frac{1}{2} A = 26^\circ 11' 18''$$

$$A = 52^\circ 22' 36''.$$

Eben so

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} B = \frac{V S. (S - b)}{V_{ac}}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \log. S & = & 2,6127839 \\
 \log. S - b & = & 2,2430380 \\
 \hline
 & & 6,8558219 - 2 \\
 \hline
 \log. a & = & 2,4149733 \\
 \log. c & = & 2,5118834 \\
 \hline
 & & 4,9268568 \\
 \hline
 & & 2/1,9289652 - 2 \\
 \hline
 & & 0,9644826 - 1. \\
 \log. \cos. \frac{1}{2} B & = & 9,9644826 \\
 \frac{1}{2} B & = & 22^\circ 51' 28'' \\
 B & = & 45^\circ 42' 56''.
 \end{array}$$

Den dritten Winkel C findet man ebenfalls durch die Gleichung:

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{S \cdot (S - c)}}{\sqrt{ab}},$$

oder durch Subtraction der bereits gefundenen Winkel $A + B$ von 180° . Erhält man in beiden Fällen gleiche Resultate, so hat man hierin einen Beweis für die Richtigkeit der Rechnung. In unserem Falle finden wir $\angle C = 81^\circ 54' 28''$.

§. 38.

Zusammenstellung der verschiedenen, bei ebenen Dreiecken vorkommenden, Fälle und ihrer Auflösung.

Ge- geben	Ge- sucht	Auflösung durch die Gleichung	Bemer- kungen
A, B, a	C b c	$C = 180 - (A + B)$ $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$ $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$	
A, a, b	B C c	$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$ $C = 180 - (A + B)$ $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$	Winkel B kann stumpf oder spitzig seyn, und ist auf jeden Fall spitzig, wenn Winkel A spitzig und a grösser als b ist.
A, b, c	B C a	$B + C = 180 - A$ $\text{Tang. } \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cdot \text{Ctg. } \frac{1}{2}A$ $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$	Einzelne findet man auch jeden Winkel durch: $\text{Tg. } B = \frac{b \cdot \sin A}{c - b \cos A}$ $\text{Tg. } C = \frac{c \cdot \sin A}{b - c \cos A}$
a, b, c	A B C	$\cos \frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{S(S-a)}}{\sqrt{bc}}$ $\cos \frac{1}{2}B = \frac{\sqrt{S(S-b)}}{\sqrt{ac}}$ $\cos \frac{1}{2}C = \frac{\sqrt{S(S-c)}}{\sqrt{ab}}$ Oder $\sin \frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(S-b)(S-c)}}{\sqrt{bc}}$ $\sin \frac{1}{2}B = \frac{\sqrt{(S-a)(S-c)}}{\sqrt{ac}}$ $\sin \frac{1}{2}C = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)}}{\sqrt{ab}}$	$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

C. Trigonometrische Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke.

§. 39.

Bisher liessen wir den Flächeninhalt der Dreiecke ganz unberücksichtigt, nur Seiten und Winkel, als zu bestimmende Stücke derselben, in Rechnung ziehend; aber, so wohl wir daran thaten, um nicht die Uebersicht der Berechnung der verschiedenen Fälle der Dreiecke zu erschweren, so nöthig ist es auch, zumal wenn wir die Anwendung der Trigonometrie auf Feldmesskunst ins Auge fassen, diese Berechnung für die einzelnen Fälle folgen zu lassen.

A u f g a b e.

Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus einer Seite c und den beiden anliegenden Winkeln zu finden.

L ö s u n g.

Aus C fälle auf c das Perpendikel CD, so ist, wenn wir den trigonometrischen Halbmesser = 1 setzen,

$$c : b = \sin. C : \sin. B$$

$$b = \frac{c \cdot \sin. B}{\sin. C}; \text{ wo } \angle C = 180^\circ - (A + B).$$

Substituirt man diesen Werth von b in die Gleichung $CD = b \cdot \sin. A$, so erhält man

$$CD = \frac{c \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin C}, \text{ und da}$$

$$\triangle ABC = \frac{AB \cdot CD}{2}, \text{ so}$$

$$\triangle ABC = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}, \text{ und der Analogie}$$

nach :

$$\triangle ABC = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}.$$

$$\triangle ABC = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin B}.$$

Zusatz. Dieselbe Berechnung findet auch für die Dreiecke Statt, in welchen überhaupt nur zwei Winkel und eine Seite gegeben ist.

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $c = 524'$, $\angle A = 42^\circ 32' 15''$
 $\angle B = 50^\circ 36' 20''$, so ist $\angle C = 86^\circ 51' 25''$ und
 man erhält die Fläche des Dreiecks ABC durch

$$\triangle ABC = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}.$$

$$\log. c = 2,7193313$$

$$\log. c^2 = 5,4386626$$

$$\log. \sin A = 9,8299933$$

$$\log. \sin B = 9,9216351$$

$$25,1902910 - 20$$

$$\log. \sin C = 9,9993462 - 10$$

$$15,1909448 - 10.$$

$$\log. 2 = 0,3010300$$

$$\log. \triangle ABC = 4,8899148$$

$$\triangle ABC = 77609,52.. q'.$$

§. 40.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten b, c und dem eingeschlossenen Winkel A zu bestimmen.

L ö s u n g.

Fällt man aus C wiederum auf c das Perp.
CD, so hat man wie vorhin:

$$CD = b. \sin A.$$

Substituirt man diesen Werth von CD in die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC , d. i. in

$$\triangle ABC = \frac{AB \cdot CD}{2}, \text{ so erhält man:}$$

$$\triangle ABC \cong \frac{b c \cdot \sin A}{2}, \text{ und der Analogie nach:}$$

$$\Delta ABC = \frac{ab \cdot \sin C}{2},$$

$$\Delta ABC = \frac{a c \cdot \sin B}{2}$$

Beispiel.

Es sey gegeben $b = 125', 32$; $c = 180', 18$; $\angle A = 96^\circ 42' 40''$, so ist

$$\Delta ABC = \frac{b.c. \sin A.}{2}.$$

$$\log. b = 2,0980204$$

$$\log. c = 2,2557066$$

$$\log. \sin. A = 9,9970140$$

14,3507410 — 10.

$$\log_2 = 0,3010300$$

$$\log. \Delta ABC = \overline{4,0497110} - 10$$

$$\Delta ABC = 11212,72 \text{ q'}$$

§. 41.

A u f g a b e.

Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten a, b, c zu berechnen.

L ö s u n g.

Wie in der vorigen Aufgabe hat man
 $CD = b \cdot \sin A$.

$$\triangle ABC = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{bc \sin A}{2}.$$

Substituirt man im letzten Ausdruck für $\sin A$ aus §. 37. seinen Werth, so erhält man

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{bc}{2} \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \\ &= \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)}, \end{aligned}$$

wo $S = \frac{1}{2}(a + b + c)$ angenommen ist.

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $a = 200'$, $b = 182'$, $c = 246'$;
 $S = \frac{1}{2}(a + b + c) = 314'$, $S - a = 114$, $S - b = 132$,
 $S - c = 68$, und

$$\triangle ABC = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)}$$

$$\log. S = 2,4969296$$

$$\log. (S-a) = 2,0569049$$

$$\log. (S-b) = 2,1205739$$

$$\log. (S-c) = 1,8325089$$

$$\hline 2/8,5069173$$

$$\log. \triangle ABC = 4,2534586$$

$$\triangle ABC = 17924,97 \dots q'.$$

III. Abschnitt.

Sphärische Trigonometrie.

§. 42.

Erklärungen.

1) Legt man durch den Mittelpunkt C einer Kugel (Fig. 16) zwei grösste Kreise PDOG, PEOF derselben, so heisst der Winkel JPH, unter welchen sich die Bögen JP, PH im Punkte P schneiden, ein sphärischer, und ist so gross als der Winkel JCH, der die Neigung der beiden Durchschnittskreise misst.

2) Legt man durch derselben Kugel Mittelpunkt noch einen dritten grössten Kreis ADBH, so dass er die beiden ersten durchschneidet, so bilden je zwei Punkte, in welchen diess geschieht, in Verbindung mit je einem der Punkte, P, O, unter welchen sich die ersten zwei Kreise schneiden, z. B. die drei Punkte F, P, G die Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks FPG, dessen Seiten die Bögen PF, PG, FG, und dessen Winkel die sphärischen Winkel FPG, PGF, GFP sind, welche nach 1. durch die gegenseitige Neigung zweier grössten Kreise gemessen werden.

3) Zum leichteren Verständniss mehrerer Sätze vom sphärischen Dreieck, welche wir in der Kürze mittheilen wollen, um rücksichtlich der Winkel und Seiten desselben seine Verschiedenheit vom ebenen Dreieck zu zeigen, können wir uns dasselbe besser durch die krummen Durchschnittslinien der Oberfläche einer Kugel mit den Ebenen einer dreikantigen Pyramide, deren Spitze sich im Mittelpunkte derselben Kugel befindet, gebildet denken. Diese krummen Durchschnittslinien, die Seiten des sphärischen Dreiecks, sind weiter nichts, als die mit dem Halbmesser der Kugel beschriebenen Bögen der drei Flächenwinkel an der Spitze der Pyramide, und unter den Winkeln des sphärischen Dreiecks versteht man diejenigen, unter welchen die drei Seitenflächen der Pyramide gegenseitig geneigt sind. Seiten daher sowohl, als Winkel müssen hier in Graden, Minuten etc. angegeben werden.

Nach dieser Erklärung wird es nicht schwer seyn, mittelst der Lehren der Stereometrie die Richtigkeit folgender Sätze vom sphärischen Dreieck einzusehen:

- a) Jede Seite eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden andern.

Von den drei ebenen Winkeln, welche den körperlichen Winkel der Pyramide bilden, sind je zwei zusammen grösser als der dritte.

- b) Die Summe der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 360° .

Der körperliche Winkel der Pyramide wird von drei ebenen Winkeln eingeschlossen, welche zusammen kleiner als vier rechte sind.

- c) Jede Seite eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 180° .

Folgt aus a. und b.

- d) Jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 180° .

Denn solches wäre nur möglich, wenn eine Seite desselben 180° gross seyn könnte, was nach c. nicht ist.

- e) Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 6 Rechte, kleiner als 540° .

Folgt aus dem vorhergehenden Satze.

- f) Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist aber stets grösser als 2 Rechte, grösser als 180° .

In der Stereometrie wird bewiesen, dass die drei Inklinationswinkel einer Pyramide grösser als 2 Rechte sind.

- g) In jedem sphärischen Dreieck liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

A. Entwicklung von Formeln zur Berechnung der sphärischen Dreiecke.

§. 43.

Unter Voraussetzung der Lehren der Goniometrie und ebenen Trigonometrie, wovon die vorhergehenden Abschnitte handelten, können

wir nun sogleich zur Lösung der Aufgabe der sphärischen Trigonometrie selbst schreiten, nämlich: *aus drei gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden.*

Es bieten sich uns, wenn wir dieselbe Bezeichnung der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks wie beim ebenen Dreieck beibehalten, zur Auflösung folgende sechs Fälle dar: A, b, c ; a, b, c ; A, B, c ; A, B, C ; A, B, a ; A, a, b , in welchen alle nur möglichen anderen enthalten sind.

Zu dieser Auflösung aber gelangt man durch nachstehende Entwicklung dreier Gleichungen, in denen uns die Grundlage der ganzen sphärischen Trigonometrie gegeben ist, indem sich aus ihnen ohne weitere Betrachtung der Figur alle anderen Gleichungen in Bezug auf die Lösung obiger sechs Fälle ableiten lassen.

Es sey (Fig. 17.) ABC ein gegebenes sphärisches Dreieck, und D der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche dasselbe beschrieben ist.

Zieht man nun an den in der Ebene ACD befindlichen grössten Kreisbogen AC in A eine Tangente, so wird solche von dem verlängerten Kugelhalbmesser CD in F geschnitten, und man hat, wenn man den Halbmesser der Kugel $= 1$. setzt:

$$AF = \text{Tang. } b, DF = \text{Sec. } b.$$

Auf gleiche Weise erhält man, wenn an den

Bogen AB in A eine Tangente, die der verlängerte Halbmesser BD in E schneidet, gezogen wird,

$$AE = \text{Tang. } c, DE = \text{Sec. } c.$$

Verbindet man nun die Punkte E, F durch eine Gerade, so erhält man das ebene Dreieck AEF, in welchem man nach §. 36. der ebenen Trigonometrie hat:

$$EF^2 = AF^2 + AE^2 - 2 AE. AF. \text{Cos. } EAF.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für AE, AF ihre so eben gefundenen Werthe und bemerkt, dass $\angle EAF = \angle A$, so ist

$$EF^2 = (\text{Tang. } b)^2 + (\text{Tang. } c)^2 - 2 \text{Tang } b. \text{Tang } c. \text{Cos. } A.$$

Im ebenen Dreieck EDF hat man gleichfalls:

$$EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 DE. DF. \text{Cos. } EDF,$$

oder:

$$EF^2 = (\text{Sec. } b)^2 + (\text{Sec. } c)^2 - 2 \text{Sec. } b. \text{Sec. } c. \text{Cos. } a.$$

Setzt man beide Werthe von EF^2 einander gleich

$$(\text{Tang } b)^2 + (\text{Tang } c)^2 - 2 \text{Tang } b. \text{Tang } c. \text{Cos. } A = (\text{Sec. } b)^2 + (\text{Sec. } c)^2 - 2 \text{Sec } b. \text{Sec } c. \text{Cos. } a.$$

und für $\text{Sec. } b^2 = 1 + \text{Tang } b^2$, so ist

$$\begin{aligned} &(\text{Tang. } b)^2 + (\text{Tang. } c)^2 - 2 \text{Tang } b. \text{Tang } c \\ &\text{Cos } A = 1 + (\text{Tang. } b)^2 + 1 + (\text{Tang. } c)^2 \\ &- 2 \text{Sec } b. \text{Sec } c. \text{Cos. } a. \end{aligned}$$

woraus

$$- 2 \text{Tang } b. \text{Tang } c. \text{Cos. } A = 2 - 2 \text{Sec } b. \text{Sec } c. \text{Cos. } a.$$

Dividirt man nun die ganze Gleichung durch 2, und setzt für *Sec. b*, *Sec. c* nach V. ihre

Werthe $= \frac{1}{\cos b} \frac{1}{\cos c}$, so hat man ferner

$$- \text{Tang } b. \text{Tang } c. \cos A = 1 - \frac{1}{\cos b. \cos c} \cos a,$$

oder

$$- \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \cos A = \frac{\cos b. \cos c - \cos a}{\cos b. \cos c}$$

$$- \sin b. \sin c. \cos A = \cos b. \cos c - \cos a,$$

woraus endlich

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b. \cos c + \sin b. \sin c. \cos A, \\ \cos b &= \cos a. \cos c + \sin a. \sin c. \cos B, \\ \cos c &= \cos a. \cos b + \sin a. \sin b. \cos C. \end{aligned} \right\} \text{I.}^*$$

Dieses sind die genannten 3 Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie, aus deren gegenwärtiger Form schon unmittelbar die Lösung zweier Aufgaben, wenn nämlich 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder alle 3 Seiten gegeben sind, hervorgeht. Bevor wir jedoch zur Lösung der einzelnen Aufgaben selbst schreiten, wollen wir erst mehrere Gleichungen aus den obigen dreien ableiten, die uns dazu erforderlich sind.

§. 44.

Aus I^{*}. im vorhergehenden §. hat man

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b. \cos c}{\sin b. \sin c.} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a. \cos c}{\sin a. \sin c.} \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a. \cos b.}{\sin a. \sin b.} \end{aligned} \right\} \text{II.}^*$$

Um diese Formeln für Logarithmen-Rechnung brauchbar zu machen, verfährt man also:

$$1 - \cos. A = 1 - \left(\frac{\cos. a - \cos b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c} \right),$$

und nach Formel XXIII.:

$$\begin{aligned} 2(\sin. \tfrac{1}{2} A)^2 &= \frac{\sin b. \sin c. - \cos a + \cos b. \cos. c}{\sin b. \sin. c.} \\ &= \frac{\cos. (b - c) - \cos. a}{\sin b. \sin c.}, \text{ und} \end{aligned}$$

nach XXXVIII.:

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} (a + b - c). \sin. \tfrac{1}{2} (a + c - b)}{\sin b. \sin c} \\ \sin. \tfrac{1}{2} A &= \frac{\sqrt{\sin \tfrac{1}{2} (a + b - c). \sin \tfrac{1}{2} (a + c - b)}}{\sqrt{\sin b. \sin c.}} \end{aligned}$$

Setzt man, wie §. 37., $\tfrac{1}{2} (a + b + c) = S$, so hat man:

$$\begin{cases} \sin. \tfrac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin (S - c). \sin (S - b)}}{\sqrt{\sin b. \sin c}}, \text{ und} \\ \text{der Analogie nach:} \\ \text{III. *} \begin{cases} \sin. \tfrac{1}{2} B = \frac{\sqrt{\sin (S - a). \sin (S - c)}}{\sqrt{\sin a. \sin c}} \\ \sin. \tfrac{1}{2} C = \frac{\sqrt{\sin (S - a). \sin (S - b)}}{\sqrt{\sin a. \sin b.}}; \end{cases} \end{cases}$$

Auf eine ähnliche Weise erhält man, wenn man statt $1 - \cos. A$ den Ausdruck $1 + \cos. A$ entwickelt,

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2} A &= \frac{\sqrt{\sin S \sin (S-a)}}{\sqrt{\sin b \sin c}} \\
 \cos \frac{1}{2} B &= \frac{\sqrt{\sin S \sin (S-b)}}{\sqrt{\sin a \sin c}} \\
 \cos \frac{1}{2} C &= \frac{\sqrt{\sin S \sin (S-c)}}{\sqrt{\sin a \sin b}}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} A \\ \cos \frac{1}{2} B \\ \cos \frac{1}{2} C \end{aligned}} \right\} \text{IV.}^*$$

§. 45.

Aus §. 43. hat man

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B$$

Quadriert man beide Gleichungen und zieht die zweite von der ersten ab, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 (\cos a)^2 - (\cos b)^2 + ((\cos b)^2 - (\cos a)^2)(\cos c)^2 \\
 = (\sin c)^2 ((\sin b)^2 (\cos A)^2 - (\sin a)^2 (\cos B)^2), \\
 ((\cos a)^2 - (\cos b)^2)(1 - (\cos c)^2) = (\sin c)^2 \\
 ((\sin b)^2 (\cos A)^2 - (\sin a)^2 (\cos B)^2)
 \end{aligned}$$

Und weil $1 - (\cos c)^2 = (\sin c)^2$, so

$$\begin{aligned}
 (\cos a)^2 - (\cos b)^2 &= (\sin b)^2 (\cos A)^2 \\
 &- (\sin a)^2 (\cos B)^2 \text{ oder}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - (\sin a)^2 - 1 + (\sin b)^2 &= (\sin b)^2 (\cos A)^2 \\
 &- (\sin a)^2 (\cos B)^2.
 \end{aligned}$$

$$(\sin b)^2 (1 - (\cos A)^2) = (\sin a)^2 (1 - (\cos B)^2)$$

$$(\sin b)^2 (\sin A)^2 = (\sin a)^2 (\sin B)^2$$

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \text{ oder}$$

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B,$$

und der Analogie nach:

$$\sin a : \sin c = \sin A : \sin C$$

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C$$

V. *

d. h. im sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

§. 46.

Aus demselben §. 43. hat man ferner:

$$\cos. c = \cos a. \cos. b + \sin a. \sin b. \sin. C$$

$$\cos. b = \cos a. \cos. c + \sin a. \sin c. \cos. B.$$

Substituirt man in diesen Gleichungen für $\sin. c$, $\sin. b$ ihre Werthe aus V*., nämlich:

$$\sin. c = \frac{\sin a. \sin C}{\sin A}$$

$$\sin. b = \frac{\sin a. \sin B}{\sin. A}, \text{ so erhält man}$$

$$\cos. c = \cos a. \cos b + \frac{(\sin a)^2 \sin. B}{\sin. A} \cos. C.$$

$$\cos. b = \cos a. \cos c + \frac{(\sin a)^2 \sin. C}{\sin. A} \cos. B$$

Multiplcirt man die erste Gleichung mit $\cos. a$, und zieht die zweite davon ab, so erhält man:

$$\cos a. \cos. c = (\cos. a)^2. \cos. b + \frac{(\sin. a)^2 \sin. B}{\sin. A}.$$

$$\cos a. \cos. C$$

$$\cos a. \cos. c = \cos. b - \frac{(\sin. a)^2 \sin. C}{\sin. A} \cos. B.$$

$$\begin{array}{l} 0 = (\cos. a)^2. \cos. b - \cos. b + \\ \frac{(\sin a)^2 \sin B. \cos a. \cos C}{\sin. A} + \frac{(\sin a)^2 \sin C. \cos B.}{\sin. A} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cos. } b (1 - (\text{Cos. } a)^2) \\ \text{Cos. } b. (\text{Sin. } a)^2 \end{array} \right\} =$$

$$\frac{(\text{Sin } a)^2. \text{Sin. } B. \text{Cos } a. \text{Cos } C + (\text{Sin } a)^2 \text{Sin } C. \text{Cos } B}{\text{Sin. } A}$$

$$\text{Cos. } b = \frac{\text{Sin } B. \text{Cos } C. \text{Cos } a. + \text{Sin } C. \text{Cos } B.}{\text{Sin. } A}$$

Setzt man diesen Werth von $\text{Cos. } b$, und den obigen von $\text{Sin. } b$ in die Gleichung $1 = (\text{Sin } b)^2 + (\text{Cos. } b)^2$, so bekommt man:

$$1 = \frac{(\text{Sin } a)^2. (\text{Sin } B)^2}{(\text{Sin. } A)^2} + \frac{(\text{Sin } B)^2. (\text{Cos } C)^2. (\text{Cos } a)^2}{(\text{Sin. } A)^2}$$

$$+ \frac{2 \text{Sin } B. \text{Sin } C. \text{Cos } B. \text{Cos } C. \text{Cos } a + (\text{Sin } C)^2. (\text{Cos } B)^2}{(\text{Sin. } A)^2}$$

Multiplicirt man ferner beide Seiten der Gleichung mit $(\text{Sinus } A)^2$, und substituirt für $(\text{Cos. } C)^2$ seinen Werth $= 1 - (\text{Sin. } C)^2$, und für $(\text{Sin. } C)^2 = 1 - (\text{Cos. } C)^2$, so hat man:

$$(\text{Sin. } A)^2 = (\text{Sin. } B)^2 + (\text{Cos. } B)^2 -$$

$$(\text{Sin } B. \text{Sin } C. \text{Cos } a - \text{Cos } C. \text{Cos. } B)^2.$$

Da nun $(\text{Sin. } B)^2 + (\text{Cos. } B)^2 = 1$ und $1 - (\text{Sin. } A)^2 = (\text{Cos } A)^2$, so ist

$$(\text{Cos. } A)^2 = (\text{Sin } B. \text{Sin } C. \text{Cos } a - \text{Cos } C. \text{Cos } B)^2$$

und

$$\text{Cos } A. = \text{Sin } B. \text{Sin } C. \text{Cos } a - \text{Cos } B. \text{Cos } C,$$

und der Analogie nach:

$$\text{Cos } B. = \text{Sin } A. \text{Sin } C. \text{Cos } b - \text{Cos } A. \text{Cos } C,$$

$$\text{Cos } C. = \text{Sin } A. \text{Sin } B. \text{Cos } c - \text{Cos } A. \text{Cos } B,$$

und aus diesen Gleichungen wiederum:

VI.*

$$\text{VII.}^* \begin{cases} \cos. a = \frac{\cos. A + \cos B. \cos C}{\sin B. \sin C} \\ \cos. b = \frac{\cos B + \cos A. \cos C}{\sin A. \sin C} \\ \cos. c = \frac{\cos. C + \cos A. \cos B.}{\sin A. \sin B.} \end{cases}$$

In den Gleichungen VI.* und VII.* ist die Lösung zweier Aufgaben enthalten, nämlich, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind, den dritten Winkel zu finden, und 2) aus den gegebenen drei Winkeln die Seiten zu bestimmen.

§. 47.

Um letztere Formeln für die Rechnung mit Logarithmen brauchbar zu machen, setze man:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos. a}{2 (\sin. \frac{1}{2} a)^2} &= 1 - \frac{\cos. A + \cos B. \cos C}{\sin B. \sin C} \\ &= \frac{\sin B. \sin C - \cos A - \cos B. \cos C}{\sin B. \sin C} \\ &= - \left(\frac{\cos. (B + C) + \cos. A}{\sin B. \sin C} \right). \end{aligned}$$

Setzt man für $\cos. (B + C) + \cos. A$ den Werth aus XXXVII. so ist

$$\begin{aligned} 2 (\sin. \frac{1}{2} a)^2 &= \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (A + B + C). \cos \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin B. \sin C} \\ \sin. \frac{1}{2} a &= \frac{\sqrt{-\cos \frac{1}{2} (A + B + C). \cos \frac{1}{2} (B + C - A)}}{\sqrt{\sin B. \sin C}} \end{aligned}$$

und wenn man $\frac{1}{2} (A + B + C) = S'$ setzt, so

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{1 - \cos S' \cdot \cos (S' - A)}}{\sqrt{\sin B \cdot \sin C}},$$

und der Analogie gemäss:

$$\sin \frac{1}{2} b = \frac{\sqrt{1 - \cos S' \cdot \cos (S' - B)}}{\sqrt{\sin A \cdot \sin C}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{VIII.}^*$$

$$\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{1 - \cos S' \cdot \cos (S' - C)}}{\sqrt{\sin A \cdot \sin B}}.$$

Damit diese Werthe nicht imaginär werden, muss $\cos S'$ negativ werden, also $S' > 90^\circ$, und die Summe der 3 Winkel eines sphärischen Dreiecks $> 180^\circ$ seyn.

Entwickelt man statt $1 - \cos a$, den Ausdruck $1 + \cos a$, so erhält man auf ähnliche Weise:

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos (S' - B) \cdot \cos (S' - C)}}{\sqrt{\sin B \cdot \sin C}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{IX.}^*$$

$$\cos \frac{1}{2} b = \frac{\sqrt{\cos (S' - A) \cdot \cos (S' - C)}}{\sqrt{\sin A \cdot \sin C}}.$$

$$\cos \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{\cos (S' - A) \cdot \cos (S' - B)}}{\sqrt{\sin A \cdot \sin B}}.$$

§. 48.

Nach V^a. ist

$$\sin A \cdot \sin b = \sin a \cdot \sin B.$$

$$\sin A \cdot \sin c = \sin a \cdot \sin C.$$

$$(\sin A)^2 \cdot \sin b \cdot \sin c = (\sin a)^2 \cdot \sin B \cdot \sin C,$$

oder nach (I.):

$$\begin{aligned} \text{a) } & (1 + \cos A) (1 - \cos A) \sin b \sin c \\ &= (1 + \cos a) (1 - \cos a) \sin B \sin C. \end{aligned}$$

oder nach XXIII.

$$\begin{aligned} & (1 + \cos A) 2 (\sin \frac{1}{2} A)^2 \sin b \sin c \\ &= (1 + \cos a) 2 (\sin \frac{1}{2} a)^2 \sin B \sin C. \\ \text{b) } & 2 (\sin \frac{1}{2} A)^2 (\sin b \sin c + \sin b \sin c \cos A) \\ &= 2 (\sin \frac{1}{2} a)^2 (\sin B \sin C + \sin B \sin C \cos a) \end{aligned}$$

Aber nach I*, ist

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c,$$

und nach VI*,

$$\sin B \sin C \cos a = \cos A + \cos B \cos C.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung b, so hat man

$$\begin{aligned} & (\sin \frac{1}{2} A)^2 (\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c) \\ &= (\sin \frac{1}{2} a)^2 (\sin B \sin C + \cos A + \cos B \cos C) \end{aligned}$$

oder nach X, XII.

$$\begin{aligned} & (\sin \frac{1}{2} A)^2 (\cos a - \cos (b + c)) \\ &= (\sin \frac{1}{2} a)^2 (\cos A + \cos (B - C)). \end{aligned}$$

und nach XXXVII, XXXVIII.

$$\begin{aligned} \text{c) } & (\sin \frac{1}{2} A)^2 2 \sin \frac{1}{2} (b + c + a) \sin \frac{1}{2} (b + c - a) \\ &= (\sin \frac{1}{2} a)^2 2 \cos \frac{1}{2} (A + B - C) \cos \frac{1}{2} (A - (B - C)) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \sin \left(\frac{b+c}{2} + \frac{a}{2} \right) \sin \left(\frac{b+c}{2} - \frac{a}{2} \right) \\ &= \left(\sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{a}{2} \right) \times \\ & \quad \left(\sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{a}{2} \right) \\ &= \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 \left(\cos \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\cos \frac{b+c}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2 \\ &= \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 \left(1 - \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2 \right) - \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2 \left(1 - \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 \\
&- \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2 + \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 \\
&= \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{a}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

Und eben so:

$$\begin{aligned}
&\cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B-C}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{B-C}{2} \right) \\
&= \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2} \right) \times \\
&\left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2} \right) \\
&= \left(\cos \frac{A}{2} \right)^2 \left(\cos \frac{B-C}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{B-C}{2} \right)^2 \\
&= \left(\cos \frac{B-C}{2} \right)^2 \left(1 - \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \right) - \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \left(1 - \left(\cos \frac{B-C}{2} \right)^2 \right) \\
&= \left(\cos \frac{B-C}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

Substituirt man diese beiden Werthe in die Gleichung c, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&(\sin \tfrac{1}{2} A)^2 \left(\left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \right) \\
&= (\sin \tfrac{1}{2} a)^2 \left(\left(\cos \frac{B-C}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \right), \text{ oder} \\
&(\sin \tfrac{1}{2} A)^2 \cdot \left(\sin \frac{b+c}{2} \right)^2 = (\sin \tfrac{1}{2} a)^2 \cdot \left(\cos \frac{B-C}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

oder endlich:

$$\sin \tfrac{1}{2} A \cdot \sin \tfrac{1}{2} (b+c) = \sin \tfrac{1}{2} a \cdot \cos \tfrac{1}{2} (B-C).$$

Aehnliche Gleichungen erhalten wir, wenn wir in die obige Gleichung (a) für

$$1 + \cos. A \text{ und } 1 - \cos. a$$

$$1 - \cos. A \text{ und } 1 + \cos. a$$

$$1 - \cos. A \text{ und } 1 + \cos. a$$

ihre Werthe setzen, und auf gleiche Weise die Entwicklung fortsetzen, so dass wir hierdurch folgende vier Gleichungen bekommen:

$$X^* \cdot \begin{cases} 1) \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} (b+c) = \sin \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} (B-C) \\ 2) \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} (b+c) = \cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} (B+C) \\ 3) \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} (b-c) = \cos \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} (B+C) \\ 4) \cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} (b-c) = \sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} (B-C), \end{cases}$$

welche unter dem Namen der Gaussischen bekannt sind.

Dividirt man 1 durch 2, 4 durch 3, 3 durch 2, und endlich 4 durch 1, so erhalten wir nachstehende 4 Gleichungen, die Neperschen genannt:

$$XI^* \cdot \begin{cases} \text{Tang. } \frac{1}{2} (b+c) = \text{Tang } \frac{1}{2} a \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (B-C)}{\cos \frac{1}{2} (B+C)} \\ \text{Tang. } \frac{1}{2} (b-c) = \text{Tang } \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (B-C)}{\sin \frac{1}{2} (B+C)} \\ \text{Tang. } \frac{1}{2} (B+C) = \text{Cotang } \frac{1}{2} A \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \frac{1}{2} (b+c)} \\ \text{Tang. } \frac{1}{2} (B-C) = \text{Cotang } \frac{1}{2} A \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\sin \frac{1}{2} (b+c)}. \end{cases}$$

Diese aus den im §. 43. angeführten Grundgleichungen entwickelten Relationen sind vollkom-

men hinreichend, um durch sie die in der sphärischen Trigonometrie vorkommenden sechs Fälle aufzulösen, wie sich in den folgenden §. §. zeigen wird.

B. Berechnung der Seiten und Winkel der sphärischen Dreiecke.

§. 49.

A u f g a b e.

Vom sphärischen Dreieck ABC seyen gegeben zwei Seiten b, c , und der von ihnen eingeschlossene Winkel A . Man bestimme die übrigen Stücke desselben.

L ö s u n g.

Aus den in XI.* entwickelten Gleichungen:

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (B + C) = \text{Cotang. } \frac{1}{2} A \cdot \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (b - c)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (b + c)}$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (B - C) = \text{Cotang. } \frac{1}{2} A \cdot \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (b - c)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (b + c)}$$

erhält man die zu bestimmenden Winkel B und C , und, wenn solche gefunden, aus

$$\text{Sin. } a = \frac{\text{Sin } c \cdot \text{Sin } A}{\text{Sin. } C} \text{ (nach V*.)}$$

oder aus

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} a = \text{Tang. } (b - c) \cdot \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (B + C)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (B - C)} \text{ nach XI.*}$$

die dritte Seite a .

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $b = 70^\circ 20' 50''$; $c = 38^\circ 28'$
und $\angle A = 52^\circ 30'$.

Da $\angle \frac{1}{2} A = 26^\circ 15'$; $\frac{1}{2} (b - c) = 15^\circ 56'$
 $25''$; $\frac{1}{2} (b + c) = 54^\circ 24' 25''$, so hat man:

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (B + C) = \text{Cotang. } \frac{1}{2} A \cdot \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2} (b - c)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} (b + c)}$$

$$\log. \text{Cotang. } \frac{1}{2} A = 10,3070250$$

$$\log. \text{Cosin. } \frac{1}{2} (b - c) = 9,9829712$$

$$20,2899962$$

$$\log. \text{Cos. } \frac{1}{2} (b + c) = 9,7649412$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} (B + C) = 10,5250550$$

$$\frac{1}{2} (B + C) = 73^\circ 22' 47''$$

$$B + C = 146^\circ 45' 34''$$

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} (B - C) = \text{Cotg. } \frac{1}{2} A \cdot \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} (b - c)}{\text{Sin. } \frac{1}{2} (b + c)};$$

$$\log. \text{Cotang. } \frac{1}{2} A = 10,3070250$$

$$\log. \text{Sin. } \frac{1}{2} (b - c) = 9,4387562$$

$$19,7457812$$

$$\log. \text{Sin. } \frac{1}{2} (b + c) = 9,9101821$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} (B - C) = 9,8355991$$

$$\frac{1}{2} (B - C) = 34^\circ 24' 20''$$

$$B - C = 68^\circ 48' 40''$$

Aus $B + C$ und $B - C$ findet man jeden Winkel einzeln, nämlich:

$$B = \frac{146^\circ 45' 34'' + 68^\circ 48' 40''}{2} = 107^\circ 47' 7''$$

$$C = \frac{146^\circ 45' 34'' - 68^\circ 48' 40''}{2} = 38^\circ 58' 27''.$$

Die dritte Seite a findet man aus

$$\text{Sin. } a = \frac{\text{Sin. } c \cdot \text{Sin. } A}{\text{Sin. } C}$$

$$\log. \sin. c = 9,7938317$$

$$\log. \sin. A = 9,8994667$$

$$\hline 19,6932984$$

$$\log. \sin. C = 9,7986299$$

$$\log. \sin. a = 9,8946685$$

$$a = 51^\circ 41' 14''.$$

§. 50.

A u f g a b e.

Vom sphärischen Dreieck ABC seyen die drei Seiten a, b, c gegeben. Man bestimme die übrigen Stücke desselben.

L ö s u n g.

Nach IV.* erhält man solche durch die Gleichungen:

$$\cos. \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin S. \sin (S - a)}}{\sqrt{\sin b. \sin c}}$$

$$\cos. \frac{1}{2} B = \frac{\sqrt{\sin S. \sin (S - b)}}{\sqrt{\sin a. \sin c}}$$

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{\sin S. \sin (S - c)}}{\sqrt{\sin a. \sin b}}, \text{ wo } S =$$

$\frac{1}{2} (a + b + c)$, oder durch

$$\sin. \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin (S - b). \sin (S - c)}}{\sqrt{\sin b. \sin c}}$$

$$\sin. \frac{1}{2} B = \frac{\sqrt{\sin (S - a). \sin (S - c)}}{\sqrt{\sin a. \sin c}}$$

$$\sin. \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{\sin (S - a). \sin (S - b)}}{\sqrt{\sin a. \sin b}}$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $a = 75^\circ 32'$, $b = 120^\circ 45' 16''$,
 $c = 48' 36' 44''$.

Man hat $S = \frac{1}{2} (a + b + c) = 122^\circ 27'$, $S - a = 46^\circ 55'$, $S - b = 1^\circ 41' 44''$, $S - c = 73^\circ 50' 16''$,
 und es ist

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\text{Sin. } (S - c) \cdot \text{Sin. } (S - b)}}{\sqrt{\text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c}}$$

$$\text{log. Sin. } (S - c) = 9,9824872$$

$$\text{log. Sin. } (S - b) = 8,4711259$$

$$\hline 18,4536131$$

$$\text{log. Sin. } b = 9,9341785$$

$$\text{log. Sin. } c = 8,8752072$$

$$\hline 19,8093857$$

$$\hline 2/0,6442274 - 2$$

$$\hline 0,3221137 - 1 + 10$$

$$\text{log. Sin. } \frac{1}{2} A = 9,3221137$$

$$\frac{1}{2} A = 12^\circ 7' 10''$$

$$A = 24^\circ 14' 20''.$$

Auf ähnliche Weise findet man die beiden anderen Winkel B und C, und die 6 Stücke des Dreiecks sind bestimmt.

§. 51.

A u f g a b e.

Vom sphärischen Dreieck *ABC* seyen die drei Winkel *A, B, C* gegeben. Man bestimme die übrigen Stücke desselben.

L ö s u n g.

Solche erhält man aus den unter VIII.* angeführten Gleichungen:

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{-\cos S' \cdot \cos (S' - A)}}{\sqrt{\sin B \cdot \sin C}},$$

$$\sin \frac{1}{2} b = \frac{\sqrt{-\cos S' \cdot \cos (S' - B)}}{\sqrt{\sin A \cdot \sin C}},$$

$$\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{-\cos S' \cdot \cos (S' - C)}}{\sqrt{\sin A \cdot \sin B}},$$

wo $S' = \frac{1}{2} (A + B + C)$, und $\cos S'$ negativ wird und so das Zeichen $-$ unter dem Wurzelzeichen sich in $+$ verwandelt.

Beispiel.

Es sey gegeben $A = 32^\circ 54' 28''$, $B = 146^\circ 58' 9''$, $C = 24^\circ 54' 47''$, so ist $S' = \frac{1}{2} (A + B + C) = 102^\circ 23' 42''$, $S' - A = 69^\circ 29' 14''$, $S' - B = -44^\circ 34' 27''$, $S' - C = 77^\circ 28' 55''$, und man hat

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{-\cos S' \cdot \cos (S' - A)}}{\sqrt{\sin B \cdot \sin C}}$$

$$\log. \cos. S' = 9,3317310$$

$$\log. \cos. (S' - A) = 9,5445842$$

$$\hline 18,8763152$$

$$\log. \sin. B = 9,7364684$$

$$\log. \sin. C = 9,6245321$$

$$\hline 19,3610005$$

$$2 / 1,5153147 - 2$$

$$\hline 0,7576573 - 1 + 10.$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} a = 9,7576573$$

$$\frac{1}{2} a = 34^\circ 54' 50''$$

$$a = 69^\circ 49' 40''.$$

Auf ähnliche Weise findet man auch die beiden anderen, noch zu bestimmenden, Seiten b und c , und alle Stücke des Dreiecks sind alsdann bekannt.

§. 52.

A u f g a b e.

Vom sphärischen Dreiecke ABC seyen gegeben zwei Seiten a , b , und ein Winkel A , welcher der einen der gegebenen Seiten gegenüber liegt. Man bestimme die übrigen Stücke desselben.

L ö s u n g.

Den Winkel B findet man nach V.* aus:

$$\sin. B = \frac{\sin A. \sin b}{\sin a}.$$

Allein hier tritt in Bezug auf den Winkel B eine Zweideutigkeit ein, ob derselbe nämlich stumpf oder spitzig zu nehmen sey, welche jedoch durch folgende, in der Aufgabe bestimmte, Umstände beschränkt wird.

Der Winkel B ist stumpf:

1) wenn $A > 90^\circ$ und $a < b$, nach dem Satze, dass auch im sphärischen Dreieck der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber liegt.

2) wenn $A < 90^\circ$ und $a > (180^\circ - b)$, denn alsdann ist auch $a + b > 180^\circ$.

und nach XI.* hat man

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (A + B) = \text{Cotang } \frac{1}{2} C. \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)}$$

Da nun in jedem sphärischen Dreiecke weder eine Seite, noch ein Winkel 180° seyn kann, so

sind die beiden Factoren $\text{Cotang. } \frac{1}{2} C$, $\text{Cos. } \frac{1}{2} (a-b)$ positiv, und es hängt das Zeichen für

$\text{Tang. } \frac{1}{2} (A + B)$ nur noch vom Faktor $\text{Cos. } \frac{1}{2} (a + b)$ ab, und beide müssen daher entweder positiv oder negativ, also überhaupt gleichartig seyn. Nun ist aber

$$a + b > 180^\circ, \text{ folglich auch}$$

$$A + B > 180^\circ, \text{ und weil}$$

$$A < 90^\circ, \text{ so ist}$$

$$B > 90^\circ, \text{ oder stumpf.}$$

b) Der Winkel B ist aber spitzig,

$$1) \text{ wenn } A < 90^\circ \text{ und } a > b.$$

$$2) \text{ wenn } A > 90^\circ, \text{ und } a < 180^\circ - b.$$

Denn alsdann ist auch $a + b < 180^\circ$, und nach der oben im 2) angeführten Gleichartigkeit auch $A + B < 180^\circ$.

Da nun $A > 90^\circ$, so ist $B < 90^\circ$, oder spitzig.

In den übrigen Fällen ist der Winkel B unbestimmt, und man muss es von anderen Umständen her zu erfahren suchen, wie derselbe zu nehmen sey.

Die dritte Seite c erhält man nach XI.* aus

$$\begin{aligned} \text{Tang. } \frac{1}{2} c &= \text{Tang } \frac{1}{2} (a + b) \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B)}, \text{ oder} \\ &= \text{Tang } \frac{1}{2} (a - b) \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B)}. \end{aligned}$$

Endlich den dritten Winkel C entweder nach XI*. aus

$$\text{Cotang. } \frac{1}{2} C = \text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) \cdot \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (a - b)},$$

oder aus

$$\text{Sin } C = \frac{\text{Sin } A \cdot \text{Sin } c}{\text{Sin } a}.$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $a = 109^\circ 39' 10''$, $b = 46^\circ 42'$,
 $A = 76^\circ 58'$, und man findet den Winkel B durch die
 Gleichung:

$$\text{Sin. } B = \frac{\text{Sin } A \cdot \text{Sin } b}{\text{Sin. } a}$$

$$\log. \text{Sin. } A = 9,9886655$$

$$\log. \text{Sin. } b = 9,8619958$$

$$\hline 19,8506613$$

$$\log. \text{Sin. } a = 9,9739347$$

$$\log. \text{Sin. } B = 9,8767266$$

$$B = 48^\circ 50' 26''.$$

Der Winkel B muss desshalb spitzig genommen werden, weil Winkel A vermöge der ihm gegenüber liegenden Seite grösser seyn muss, als der Winkel B, Winkel A aber selbst spitzig ist.

Die dritte Seite c erhält man aus

$$\text{Tang } \frac{1}{2} c = \text{Tang } \frac{1}{2} (a - b) \cdot \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B)}$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} (a - b) = 9,7869175$$

$$\log. \text{Sin. } \frac{1}{2} (A + B) = 9,9495078$$

$$\hline 19,7364253$$

$$\log. \text{Sin } \frac{1}{2} (A - B) = 9,3855876$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} c = 10,3508377$$

$$\frac{1}{2} c = 65^\circ 58' 18''$$

$$c = 131^\circ 56' 36''.$$

Den dritten Winkel C endlich aus

$$\sin. C = \frac{\sin. A. \sin. c}{\sin. a}$$

$$\log. \sin. A = 9,9886655$$

$$\log. \sin. c = 9,8714598$$

$$\hline 19,8601253$$

$$\log. \sin. a = 9,9739347$$

$$\log. \sin. C = 9,8861906$$

$$C = 129^\circ 41' 38'',$$

welcher desshalb stumpf zu nehmen ist, weil die Seite c grösser als a ist, und a selbst $76^\circ 58'$ misst.

Denselben Werth von C findet man aus der Gleichung

$$\cotang \frac{1}{2} C = \text{Tang} \frac{1}{2} (A - B) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} (a - b)}$$

$$\log. \text{Tang.} \frac{1}{2} (A - B) = 9,3988030$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} (a + b) = 9,9906864$$

$$\hline 19,3894894$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} (a - b) = 9,7177929$$

$$\log. \cotang. \frac{1}{2} C = 9,6716965$$

$$\frac{1}{2} C = 64^\circ 50' 49''$$

$$C = 129^\circ 41' 38''.$$

§. 53.

A u f g a b e.

Vom sphärischen Dreieck ABC seyen zwei Winkel A, B und die Seite a gegeben, welche dem einen der gegebenen Winkel gegenüber liegt. Man bestimme die übrigen Stücke desselben.

L ö s u n g.

Die zweite Seite b findet man nach V.* durch die Gleichung:

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A};$$

Die Zweideutigkeit in Bezug auf b hebt sich wie in der vorigen Aufgabe in folgenden vier Fällen:

b ist stumpf,

1) wenn $a > 90^\circ$, und $A < B$.

2) wenn $a < 90^\circ$ und $A > (180^\circ - B)$.

b ist spitzig,

1) wenn $a < 90^\circ$, und $A > B$.

2) wenn $a > 90^\circ$, und $A < (180^\circ - B)$.

Die Gründe dafür sind dieselben wie in der vorigen Aufgabe.

Die dritte Seite c erhält man nach XI.* aus

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (a + b),$$

oder

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} (A - B)} \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (a - b).$$

Den noch zu bestimmenden Winkel C aber nach V.* aus

$$\sin C = \frac{\sin c \cdot \sin A}{\sin a}, \text{ oder}$$

$$\sin C = \frac{\sin B \cdot \sin c}{\sin b}, \text{ oder nach XI.* aus}$$

$$\begin{aligned} \text{Cotang } \frac{1}{2} C &= \text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} (a - b)}; \\ &= \text{Tang } \frac{1}{2} (A + B) \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \end{aligned}$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $A = 128^\circ 4' 58''$, $B = 36^\circ 56' 12''$, $a = 41^\circ 0' 13''$, so findet man die Seite b aus

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A.}$$

$$\log. \sin a = 9,8169744$$

$$\log. \sin B = 9,7788252$$

$$\hline 19,5957996$$

$$\log. \sin A = 9,8960412$$

$$\log. \sin b = 9,6997584$$

$$b = 30^\circ 3' 36''.$$

Die Seite b muss hier spitzig genommen werden, weil $a < 90^\circ$, und $A > B$ ist.

Die dritte Seite c ergibt sich aus

$$\text{Tang } \frac{1}{2} c = \text{Tang. } \frac{1}{2} (a - b) \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} (A - B)}$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} (a - b) = 8,9813422$$

$$\log. \sin \frac{1}{2} (A + B) = 9,9962783$$

$$\hline 18,9776205$$

$$\log. \sin \frac{1}{2} (A - B) = 9,8537856$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} c = 9,1238349$$

$$\frac{1}{2} c = 7^\circ 34' 32''$$

$$c = 15^\circ 9' 4''.$$

Den noch zu bestimmenden dritten Winkel C findet man endlich aus

$$\sin C = \frac{\sin c \cdot \sin A}{\sin. a}$$

$$\log. \sin c = 9,4172485$$

$$\log. \sin A = 9,8960412$$

$$\hline 19,3132897$$

$$\log. \sin a = 9,8169744$$

$$\log. \sin C = 9,4963153$$

$$C = 18^\circ 16' 25''.$$

§. 54.

A u f g a b e.

Vom sphärischen Dreiecke ABC seyen gegeben eine Seite c , und die beiden an ihr liegenden Winkel A, B . Man bestimme die übrigen Stücke desselben.

L ö s u n g.

Die beiden übrigen Seiten findet man nach XI*. aus

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)} \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} c.$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A + B)} \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} c.$$

und den dritten Winkel nach XI*. aus

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} C = \text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (a - b)},$$

oder

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} C = \text{Tang } \frac{1}{2} (A + B) \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (a - b)},$$

oder auch

$$\text{Sin } C = \frac{\text{Sin } c \cdot \text{Sin } A}{\text{Sin } a};$$

B e i s p i e l.

Es sey gegeben $A = 146^\circ 36'$, $B = 27^\circ 52'$,
 $c = 46^\circ 24'$.

$$\text{Es ist } \text{Tang } \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)} \text{Tang } \frac{1}{2} c$$

$$\log. \text{Cos } \frac{1}{2} (A - B) = 9,7071801$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} c = 9,6320527$$

$$19,3392328$$

$$\log. \text{Cos } \frac{1}{2} (A + B) = 8,6836654$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} (a + b) = 10,6555674$$

$$\frac{1}{2} (a + b) = 77^\circ 32' 12''$$

$$a + b = 155^\circ 4' 24''.$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A + B)} \text{Tang } \frac{1}{2} c$$

$$\log. \text{Sin } \frac{1}{2} (A - B) = 9,9347235$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} c = 9,6320527$$

$$19,5667762$$

$$\log. \text{Sin } \frac{1}{2} (A + B) = 9,9994935$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} (a - b) = 9,5672827$$

$$\frac{1}{2} (a - b) = 20^\circ 15' 55''$$

$$a - b = 40^\circ 31' 50''.$$

Aus den Werthen von $a + b$ und $a - b$ ergibt sich jede Seite einzeln, nämlich $a = 97^\circ 48' 7''$ und $b = 57^\circ 16' 17''$.

$$\text{Sin. } C = \frac{\text{Sin } c. \text{ Sin } A}{\text{Sin } a}.$$

$$\log. \text{Sin } c = 9,8598416$$

$$\log. \text{Sin } A = 9,7407421$$

$$19,6005837$$

$$\log. \text{Sin } a = 9,9959601$$

$$\log. \text{Sin } C = 9,6046236$$

$$C = 23^\circ 43' 35''$$

Zusammenstellung der verschiedenen bei sphärischen Dreiecken vorkommenden Fälle u. ihrer Auflösung.

Gegeben	Gesucht	Auflösung durch die Gleichung	Bemerkungen
b, c, A	B, C, a	$\text{Tang } \frac{1}{2} (B+C) = \text{Cotang } \frac{1}{2} A \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \frac{1}{2} (b+c)},$ $\text{Tang } \frac{1}{2} (B-C) = \text{Cotang } \frac{1}{2} A \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\sin \frac{1}{2} (b+c)},$ $\sin a = \frac{\sin c \cdot \sin A}{\sin C},$	Die Seite a kann auch gefunden werden durch $\text{Tang } \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (B+C)}{\text{Tang } \frac{1}{2} (b-c) \sin \frac{1}{2} (B-C)}$
a, b, c	A	$\cos \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin S \cdot \sin (S-a)}}{\sqrt{\sin b \cdot \sin c}},$ $\sin \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin (S-c) \cdot (\sin S - b)}}{\sqrt{\sin b \cdot \sin c}},$	$S = \frac{1}{2} (a+b+c)$ Analog findet man auch die Winkel B und C.
A, B, C	a	$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos S' \cdot \cos (S' - B)}}{\sqrt{\sin B \cdot \sin C}},$ $\cos \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos (S' - B) \cos (S' - C)}}{\sqrt{\sin B \cdot \sin C}},$	$S' = \frac{1}{2} (A+B+C)$ Analog findet man auch b, c.

a, b, A	B	$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin a}{\sin b}$	$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}$	B ist in manchen Fällen unbestimmt. C erhält man auch durch $\cotang \frac{1}{2}C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}$
	c	$\tan \frac{1}{2}c = \frac{\sin A \sin c}{\sin a}$		
	C	$\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a}$		
A, B, a	b	$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$	$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}$	b in manchen Fällen unbestimmt.
	c	$\tan \frac{1}{2}c = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$		C findet man auch wie im vorigen Fall.
	C	$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$		
A, B, c	a, b,	$\tan \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}c} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}$	$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$	C findet man auch wie im vorletzten Falle.
	C	$\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a}$		

C. Berechnung des Flächeninhalts der sphärischen Dreiecke.

§. 56.

Wenn zwei grösste Kreise ACDB, CEDF einer Kugel sich schneiden, (Fig. 18) so verhält sich der Flächeninhalt des Kugelstreifens CADEC zum Flächeninhalt der ganzen Kugel, wie der Neigungswinkel AME der beiden sich schneidenden grössten Kreise zu vier rechten Winkeln; d. h. es ist, wenn wir den Neigungswinkel AME $= m$ setzen und den Flächeninhalt der Kugel $= 4r^2 \pi$,

$$\text{CADEC} = \frac{4r^2 \pi m}{360} = \frac{r^2 \pi m}{90}.$$

Schneiden sich (Fig. 19) drei grösste Kreise ACBD, CEDF, AEBF, so bilden sich sphärische Dreiecke, und zwar von der Eigenschaft, dass die Summe von je zwei in derselben Halbkugel einander gegenüber liegenden CAE, CFB dem Kugelstreifen CADE gleich ist, weil das sphärische Dreieck CFB mit dem sphärischen Dreieck DAE gleiche Grösse hat. Denn da

$$AC + CB = 180^\circ$$

$$AC + AD = 180^\circ, \text{ so ist } CB = AD.$$

$$CF + CE = 180^\circ$$

$$CE + DE = 180^\circ, \text{ folglich } CF = DE.$$

$$AF + BF = 180^\circ,$$

$$AF + AE = 180^\circ, \text{ folglich } BF = AE,$$

und die Dreiecke haben alle drei Seiten gegenseitig gleich, so wie auch alle Winkel, und sind desshalb gleich gross. Es ist demnach

$$\triangle ACE + \triangle CFB = \text{CADEC} = \frac{r^2 \pi m}{90},$$

wo m den Neigungswinkel der Kreise CADB, CEDF, oder den sphärischen Winkel ACE bedeutet.

Wenden wir diesen Satz auf das sphärische Dreieck ABC an, (Fig. 20.) dessen Seiten man sich verlängert denkt, bis sie die Peripherie eines grössten Kreises DEGH ausserhalb desselben treffen, so hat man

$$\triangle AHJ + \triangle AFE = \frac{r^2 \pi A}{90^\circ}$$

$$\triangle CFG + \triangle DCJ = \frac{r^2 \pi C}{90^\circ}$$

$$\triangle GBH + \triangle DBE = \frac{r^2 \pi B}{90^\circ}$$

Die Summe der sechs Dreiecke auf der linken Seite der Gleichungen übertrifft die Fläche der Halbkugel um das doppelte Dreieck ABC, so dass man hat:

$$2 r^2 \pi + 2 \triangle ABC = \frac{r^2 \pi}{90^\circ} (A + B + C),$$

woraus man erhält:

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{r^2 \pi}{180} (A + B + C) - r^2 \pi \\ &= \frac{r^2 \pi}{180^\circ} (A + B + C - 180^\circ), \text{ oder} \end{aligned}$$

$\triangle ABC : r^2 \pi = (A + B + C - 180^\circ) : 180^\circ$
 d. h. der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur Fläche des grössten Kreises der Kugel, wie der Ueberschuss der Summe seiner drei Winkel über 2 Rechte, zu 2 Rechten.

Daraus geht auch leicht der Satz hervor:

zwei sphärische Dreiecke auf derselben Kugelfläche verhalten sich ihrem Flächeninhalt nach wie die Ueberschüsse der Summen ihrer drei Winkel über 2 Rechte.

B e i s p i e l.

Es sey $A = 50^\circ 20'$, $B = 80^\circ 36'$, $C = 75^\circ 50'$,
 und der Halbmesser der Kugel $r = 6' 8''$, so ist der
 Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks, weil $A + B + C$
 $= 206^\circ 46'$ ist

$$\triangle ABC = \frac{68^2 \cdot 3,141}{180} (206^\circ 46' - 180^\circ)$$

$$= \frac{68^2 \cdot 3,141 \cdot 206,766}{180} \dots$$

$$\log. 68 = 1,8325089$$

$$\log. 68^2 = 3,6650178$$

$$\log. 3,141 = 0,4970679$$

$$\log. 26,766 = 1,4275835$$

$$5,5896692$$

$$\log. 180 = 2,2552725$$

$$\log. \triangle ABC = 3,3343967$$

$$\triangle ABC = 2159,72 \text{ q''}.$$

A n h a n g

von Aufgaben nebst kurzer An- deutung ihrer Lösung.

I. Aus der ebenen Trigonometrie.

1) Die Höhe eines Thurmes zu finden, dessen Entfernung von einem gewissen Punkte in einer mit seinem Fusspunkte horizontalen Ebene gefunden ist.

NB. Bei dieser und einigen folgenden Feldmesser-Aufgaben wird der dazu erforderliche Apparat, mit welchem man Linien, Horizontal- und Höhenwinkel messen kann, vorausgesetzt.

Lös. Fig. 12. §. 27. Beisp. $AB = 208'$ $\angle B = 42^\circ 46' 10''$.

2) Die Entfernung zweier Punkte A, B vom Punkte C aus, der mit beiden in derselben Horizontalebene liegt, zu finden, wenn man nur die Entfernung der Punkte A, C unmittelbar durch Messung finden kann.

Lös. Fig. 14. §. 34. Beisp. $AC = 218'$, $\angle A = 60^\circ 30' 26''$, $\angle C = 75^\circ 32'$.

3) Die Entfernung zweier Punkte B, C, welche man wegen eines Hindernisses unmittelbar

nicht messen kann, vom Punkte A aus, der in derselben Horizontalebene liegt und dessen Entfernung von B und C man gefunden hat, zu bestimmen.

Lös. Fig. 14. §. 36. Beisp. $AC = 210'$,
 $AB = 224'$, $\angle A = 64^\circ 30' 20''$.

4) Die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte A, B zu finden:

Lös. Fig. 21. Messe eine beliebige Standlinie CD, so kennt man die Dreiecke ACD, BCD, und durch sie das $\triangle ABD$, also die gesuchte Entfernung.

Beispiel. $CD = 1325'$, $\angle ACD = 84^\circ 32'$,
 $\angle ADC = 36^\circ 42'$, $\angle BCD = 40^\circ 25' 36''$,
 $\angle BDC = 82^\circ 27'$.

5) Die Höhe eines in einer Horizontalebene liegenden Thurms zu finden, zu dessen Fusspunkt man nicht unmittelbar messen kann.

Lös. Fig. 22. Messe eine beliebige Standlinie CD, so kennt man das horizontale $\triangle DBC$, wo B der Fusspunkt des Thurmes AB, und weiss also die Entfernung BC. Die Höhe selbst findet man weiter wie in Aufgabe 1.

Beispiel: $DC = 815'$, $\angle D = 52^\circ 16'$, $\angle C = 48^\circ 20' 8''$, $\angle BCA = 15^\circ 32' 24''$.

6) Den Inhalt eines Dreiecks zu finden aus seinen Winkeln A, B, C und seiner Höhe h. Fig. 14.

Beispiel: $\angle A = 65^\circ 32'$, $\angle B = 50^\circ 30'$,
 $\angle C = 63^\circ 58'$, $h = 154' 6''$.

7) Der Centriwinkel $\angle ACB$ eines Kreises, so wie dessen Halbmesser AC ist gegeben.

Man bestimme Fig. 7.:

- a) die Grösse der Sehne AB ,
- b) ihren Abstand vom Mittelpunkt CE ,
- c) den Inhalt des Sektors ABC ,
- d) den Inhalt des Segments $ADBA$.

Beisp. $\angle ACB = 88^\circ 42'$, $AC = r = 48'$.

8) Die Grösse der Sehne AB eines Kreises, so wie dessen Halbmesser AC ist bekannt.

Man bestimme Fig. 7.

- a) den zugehörigen Centriwinkel $\angle ACB$,
- b) ihren Abstand vom Mittelpunkt CE ,
- c) den Inhalt des Sektors ABC ,
- d) den Inhalt des Segments $ADBA$.

Beisp. Sehne $AB = 120'$, $AC = r = 82'$.

9) Der Centriwinkel $\angle ACB$, so wie dessen zugehörige Sehne AB ist gegeben.

Man bestimme Fig. 7.

- a) den zugehörigen Halbmesser AC ,
- b) den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt CE ,
- c) den Inhalt des Sektors ABC ,
- d) den Inhalt des Segments $ADBA$.

Beisp. $\angle ACB = 80^\circ 56'$, Sehne $320' 8''$.

10) Den Inhalt eines regulären Vielecks aus dem Halbmesser R des um, oder dem Halbmesser r des in dasselbe beschriebenen Kreises zu finden.

Lös. a) Da der Centriwinkel eines der n Dreiecke, aus welchen das Vieleck besteht, $\frac{360^\circ}{n}$

ist, so findet man leicht die zugehörige Sehne oder die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Vielecks, und den Abstand dieser vom Mittelpunkt nach Aufg. 7, und dadurch den Inhalt eines der n Dreiecke, und somit den Inhalt des ganzen Vielecks.

b) hat man den Centriwinkel C eines der n Dreiecke des um den Kreis beschriebenen Vielecks bestimmt $= \frac{360^\circ}{n}$, so ist der Inhalt eines solchen Dreiecks $= r^2 \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} C$, und der Inhalt des Vielecks $= n r^2 \text{Tang. } \frac{180^\circ}{n}$

Beisp. $R = 85'$, $r = ?$, $n = 9$

11) Aus der Seite a eines regulären n Eckes den Halbmesser des um, oder in dasselbe beschriebenen Kreises zu bestimmen.

Lösung. Aufg. 9.

Beisp. $a = 48'$,

$n = 10$.

12) Die Halbmesser zweier sich schneidenden Kreise R , r (Fig. 23.) sind gegeben. Man soll den Inhalt des mondförmigen Abschnitts $CEDMC$, der dadurch entsteht, finden, wenn man den Centriwinkel DBC kennt.

Lös. Vom Segment $DCED$ ziehe das Segment $DCMD$ ab.

Beispiel: $CB = R = 40'$, $\angle DBC = 35^\circ$,
 $AC = r = 18'$.

13) Einen Kreisausschnitt zu bestimmen, der durch seine Sehne halbt wird.

Lös. Bezeichnet man den Winkel des Ausschnitts

mit x , so ist sein Flächeninhalt $\frac{\pi x r^2}{360}$, und

der Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2} r^2 \sin x$. Dem-

nach ist $r^2 \sin x = \frac{\pi x r^2}{360}$

$$\sin x = \frac{\pi x}{360}.$$

Welcher Werth ist demnach dem Winkel x beizulegen, damit der Gleichung Genüge geschehe? (Regula Falsi.)

14) Einen Halbkreis durch eine mit dem Durchmesser parallele Sehne zu halbiren.

Lös. Bezeichnet man den der Sehne zugehörigen Centriwinkel wiederum mit x , so ist der

Inhalt des Segments $= \frac{\pi r^2 x}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin x$.

Dieses dem Inhalt der Hälfte des Halbkreises gleichgesetzt, gibt

$$\frac{\pi r^2 x}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{4} \pi r^2.$$

$$x \pi - 180 \sin x = 90^\circ \pi$$

$$\sin x = \frac{\pi (x - 90^\circ)}{180}.$$

Für welchen Werth von x geschieht der Gleichung Genüge?

15) In einen gegebenen Kreis soll eine Anzahl gleich grosser Kreise also hinein beschrieben

werden, dass sie sich untereinander und die Peripherie des gegebenen Kreises berühren. Man bestimme ihren Halbmesser.

Lös. Der Halbmesser des gegebenen Kreises sey r , n die Anzahl der zu beschreibenden Kreise, deren Halbmesser $= x$, so ist die Aufgabe, den Halbmesser eines Kreises zu bestimmen, der die Schenkel und den Bogen eines gegebenen Kreisausschnittes, dessen Winkel $= \frac{360^\circ}{n}$, berührt. Da der Mittelpunkt dieses in der Halbierungslinie des Winkels des Kreisausschnitts sich befindet, so hat man,

$$x = (r - x) \frac{180^\circ}{n}$$

$$x \left(1 + \sin \frac{180^\circ}{n}\right) = r \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$x = \frac{r \sin \frac{180^\circ}{n}}{1 + \sin \frac{180^\circ}{n}};$$

Beisp. $r = 60$, $n = 15$.

16) Von einem Dreieck ist eine Seite, der ihr gegenüber liegende Winkel, und die Summe der beiden andern Seiten gegeben. Man bestimme alle anderen Stücke desselben.

Lösung. Es sey (Fig. 14) gegeben $AB = c$,

$$\angle C, AC + BC = s.$$

Setzt man $AC = b = x$, so ist $BC = a = s - x$, und man hat nach §. 36.:

$$c^2 = x^2 + (s - x)^2 - 2x(s - x) \cos C$$

$$x = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{c^2 - s^2}{4 \left(\cos \frac{C}{2}\right)^2}}}{1}$$

woraus sich leicht das übrige finden lässt.

Beispiel: $c = 120'$, $\angle C = 98^\circ 15'$, $s = 197'$.

17) Von einem Dreieck ist eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben. Man bestimme die einzelnen Stücke desselben.

Lösung. Es sey (Fig. 14.) gegeben $AB = c$,
 $\angle A$, $AC + BC = s$.

Setzt man $AC = b = x$, so ist $BC = a = s - x$, und man hat

$$(s - x)^2 = x^2 + c^2 - 2x c \cos A.$$

$$x = \frac{s^2 - c^2}{2(s - c \cos A.)}$$

Ist x gefunden, so lassen sich leicht alle übrigen Stücke finden.

Beispiel: $c = 240'$, $\angle A = 115^\circ 36' 12''$,
 $s = 500'$.

18) Von einem Dreiecke ist die Grundlinie, der gegenüber liegende Winkel und seine Höhe gegeben. Man bestimme die übrigen Stücke.

Lösung. Es sey (Fig. 14.) gegeben $AB = c$,
 $CD = h$, $\angle C$.

Setzt man $\angle DCB = x$, so ist $ACD = C - x$,
 und man hat

$$BD = h \cdot \text{Tang } x, AD = h \cdot \text{Tang } (C - x); \text{ und}$$

$$h. \text{Tang } x + h. \text{Tang } (C - x) = c.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man endlich:

$$\text{Tang } x = \frac{c \pm \sqrt{4ch \text{Ctg } C + c^2 + 4h^2}}{2h}.$$

Ist x gefunden, so bestimmt man leicht die übrigen Stücke.

Beispiel: $AB = c = 84'$, $CD = h = 75'$,
 $\angle C = 60^\circ 30'$.

19) Von einem Dreiecke ist die Summe seiner drei Seiten, ein Winkel und der Flächeninhalt desselben gegeben. Man bestimme die einzelnen Stücke des Dreiecks.

Lösung. Es sey $AC + CB + AB = s$, $\angle A$,
 Flächeninhalt $= m^2$ gegeben.

Setzt man $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, so ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$x + y + z = s.$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \text{Cos } A.$$

$$y \cdot x \cdot \text{Sin } A = \frac{m^2}{2},$$

woraus sich die einzelnen Seiten, und wenn diese gefunden, leicht die Winkel des Dreiecks ergeben.

Beispiel: $AC + CB + AB = 520'$, $\angle A = 52^\circ 35' 20''$, $m^2 = 14400 \text{ q'}$.

20) Von einem Dreiecke sind die aus den Winkelspitzen auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten Perpendikel gegeben. Man bestimme das Dreieck.

Lösung. Es sey (Fig. 24) gegeben $CD = m$,
 $BE = n$, $AF = r$, so hat man wegen Aehn-
 lichkeit der Dreiecke:

$$a = \frac{c \cdot m}{r}, b = \frac{c \cdot n}{r}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 ab}, \text{ so erhält man}$$

$$\cos C = \frac{m^2 n^2 + m^2 r^2 - n^2 r^2}{2 m^2 r n} = \frac{n}{2 r} + \frac{r}{2 n} - \frac{n r}{2 m^2}.$$

Aehnliche Ausdrücke entwickelt man für $\cos A$,
 $\cos B$, oder auch nur für den einen dieser Win-
 kel, und man kennt alsdann die Winkel des Drei-
 ecks, durch welche man leicht in Verbindung mit
 den Perpendikeln, die Seiten findet.

Beispiel: $m = 90'$, $n = 104'$, $r = 92'$.

21) Es ist ein Dreieck gegeben und zwei
 von den Winkeln, welche die von einem Punkte
 innerhalb des Dreiecks an dessen Eckpunkte ge-
 zogenen Geraden mit einander bilden. Man soll
 diesen Punkt innerhalb des Dreiecks bestimmen.

Lösung: Es seyen (Fig. 25.) gegeben die 3
 Seiten a, b, c und die diesen gegenüberlie-
 genden Winkel A, B, C ; ferner $\angle CDB = \alpha$,
 $\angle ADC = \beta$. Setzt man den Winkel
 $CAD = x$, so ist $\angle ACD = 180 - \beta - x$;
 $\angle DCB = C - (180 - \beta - x)$, $\angle CBD$
 $= 180 - \alpha - C + 180 - \beta - x = 360 -$
 $(C + \alpha + \beta + x).$

Da nun $CD = \frac{b \cdot \sin x}{\sin \beta}$, und

$$CD = \frac{a \cdot \sin (360 - (C + \alpha + \beta + x))}{\sin \alpha}.$$

so hat man

$$\frac{b \cdot \sin x}{\sin \beta} = \frac{a \cdot \sin (360 - (C + \alpha + \beta + x))}{\sin \alpha}.$$

woraus nach gehöriger Entwicklung

$$\text{Tang } x = \frac{a \cdot \sin \epsilon \cdot \sin (360 - C - \alpha - \beta)}{b \sin \alpha + a \cdot \sin \beta \cdot \cos (360 - C - \alpha - \beta)}$$

Ist hieraus der Winkel x gefunden, so findet man leicht die Linie AD und den Punkt D .

Beispiel: $a = 120'$, $b = 125'$, $c = 130'$,
 $\alpha = 110^\circ 20'$, $\beta = 125^\circ 30'$.

II. Aus der sphärischen Trigonometrie.

1) Aus der geographischen Breite und Länge zweier Orte, z. B. Nürnberg und München, ihre Bogenentfernung, die zu einem grössten Kreis der Erdkugel gehört, zu berechnen.

Lösung: die Breite von Nürnberg ist $49^\circ 27' 12''$,

seine Länge $28^\circ 45'$;

die Breite von München ist $48^\circ 8' 20''$,

seine Länge $29^\circ 14' 15''$.

Es bezeichne in Fig. 26. N die Lage von Nürnberg und M die von München, so ist, wenn man ihre Meridiane zieht, BN die geographische Breite von Nürnberg, DM die von München, und man findet leicht ihre Polardistanzen PN , PM .

Der sphärische Winkel NPM bezeichnet den Unterschied ihrer Längen, so dass im sphärischen Dreieck PNM zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, woraus sich die gesuchte dritte Seite nach §. 49. bestimmen lässt.

Man findet so die gesuchte Entfernung in Graden etc., welche sich jedoch leicht in geographischen Meilen ausdrücken lässt, wenn man sich erinnert, dass ein Grad 15 geographische Meilen beträgt.

Beispiel: Die geographische Breite von Berlin ist $52^{\circ} 31' 30''$, seine Länge $31^{\circ} 2' 30''$.

Die geographische Breite von Paris ist $48^{\circ} 50' 14''$, seine Länge 20° .

Welches ist ihre Bogenentfernung?

2) Aus der geographischen Breite und der Entfernung zweier Orte ihre Längendifferenz zu finden.

Lösung. Im sphärischen Dreieck PMN (Fig 26.) sind alle Seiten bekannt und man findet leicht den zu bestimmenden Winkel NPM, d. i. die Längendifferenz beider Orte nach §. 50.

Beispiel: Die Breite von London ist $51^{\circ} 30' 49''$, die von München $48^{\circ} 8' 20''$; ihre Entfernung ist $8^{\circ} 14' 30''$. Welches ist der Unterschied ihrer Längen?

3) Die Declination der Sonne für einen bestimmten Tag zu finden.

Lösung: Es sey in Fig. 27. AQ der Aequator, EL die Ekliptik. Steht nun für den bestimmten Tag die Sonne in S, und man zieht

durch sie den Meridian PO , so bezeichnet SR die Declination der Sonne für selbigen Tag. Im rechtwinkligen Dreiecke SVR ist $\angle SVR$ als Schiefe der Ekliptik bekannt und $= 23^{\circ} 27' 33''$, die Seite VR , oder die Rectascension der Sonne findet man aber, wenn man bedenkt, dass dieselbe vom 21. März an täglich um $0,967$ Grad sich vom Aequinoctialpunkte entfernt. Aus einem Winkel und einer Seite lassen sich aber die übrigen Stücke eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks leicht bestimmen.

Beispiel: Welches ist die Declination der Sonne am 30. Juni?

4) Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben. Man soll das Perpendikel finden, welches von einer Spitze desselben auf die gegenüberliegende Seite gefällt ist.

Lösung: Nach §. 50. bestimme man (Fig. 28.) den Winkel A , so erhält man das Perpendikel CD aus der Gleichung:

$$\sin CD = \sin b \cdot \sin A.$$

Beispiel: $a = 50^{\circ} 32'$, $b = 72^{\circ} 10'$, $c = 98^{\circ} 25'$.

5) Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben. Man soll die Segmente der Seite bestimmen, welche durch die Herablassung eines Perpendikels von der gegenüberliegenden Spitze auf ihr entstehen.

Lösung: Man suche zuerst das Perpendikel $CD = p$, so hat man nach §. 43.

$$\cos AC = \cos AD \cdot \cos CD$$

$$\cos AD = \frac{\cos b}{\cos p}$$

$$DB = AB - AD.$$

Beispiel: $a = 55^\circ 36'$, $b = 96^\circ 20'$, $c = 48^\circ 45'$.

6) Ein Winkel eines sphärischen Dreiecks (Fig. 28.) ist gegeben, so wie die Segmente der diesem gegenüberliegenden Seite, welche durch die Herablassung eines Perpendikels entstehen. Man soll das Dreieck bestimmen.

Lösung: Gegeben sey $\angle C$, $AD = m$, $DB = n$.

Setzt man $\angle ACD = x$, so findet man leicht die Seite AC , so wie im Dreieck DCB , wo $\angle DCB = C - x$ ist, die Seite BC . Wenn beide gefunden, suche man die zwei Werthe von CD , durch deren Gleichsetzung man den Werth von x erhält und dadurch in den Stand gesetzt ist, die einzelnen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Beispiel: $\angle C = 92^\circ 36'$, $m = 30^\circ 16'$, $n = 50^\circ 40'$.

7) Die beiden Segmente auf der Seite eines sphärischen Dreiecks, welche von den durch die gegenüberliegende Spitze gezogenen grössten Kreis gebildet wurden, sind gegeben; so wie die drei Seiten des Dreiecks. Man soll diesen Bogen bestimmen.

Lösung: Setzt man (Fig. 28) den gesuchten Bogen $CD = x$, das gegebene Segment $AD = m$, so ist nach §. 44.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}, \text{ und auch}$$

$$\cos A = \frac{\cos x - \cos c \cdot \cos m}{\sin c \cdot \sin m}$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, so erhält man endlich:

$$\cos x = (\cos a - \cos b \cdot \cos c) \frac{\sin m}{\sin b}$$

$$+ \cos c \cdot \cos m.$$

Beispiel: $a = 50^\circ 36'$, $b = 40^\circ 18'$, $c = 75^\circ 50'$,
 $m = 32^\circ 30'$.

8) Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben, so wie zwei Punkte, welche in zwei Seiten desselben liegen. Man soll den Bogen bestimmen, der beide Punkte verbindet.

Lösung. Die gegebenen Stücke (Fig. 29.) seyen

$$AD = m, AE = n, DE = x.$$

Man hat in der vorigen Aufgabe

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos A = \frac{\cos x - \cos m \cdot \cos n}{\sin m \cdot \sin n}; \text{ und durch}$$

Gleichsetzung:

$$\cos x = (\cos a - \cos b \cdot \cos c) \frac{\sin m \cdot \sin n}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$+ \cos m \cdot \cos n.$$

Beispiel: $a = 42^\circ 36'$, $b = 112^\circ 40'$, $c = 70^\circ 25'$,
 $m = 62^\circ 15'$, $n = 52^\circ 48'$.

9) Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben. Man bestimme die drei Seiten des

Sehnendreiecks, welches entsteht, wenn man die drei Eckpunkte des sphärischen Dreiecks durch Gerade verbindet.

Lösung. Setzt man den Halbmesser $= 1$, so ist die Sehne eines Bogens dem doppelten Sinus seiner Hälfte gleich, und man hat, wenn die den sphärischen Dreiecksseiten a, b, c entsprechenden Seiten des Sehnendreiecks mit a', b', c' bezeichnet werden,

$$a' = 2 \sin. \frac{1}{2} a$$

$$b' = 2 \sin. \frac{1}{2} b$$

$$c' = 2 \sin. \frac{1}{2} c.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass sich auch die Seiten eines sphärischen Dreiecks aus den Seiten des zugehörigen Sehnendreiecks bestimmen lassen, nämlich:

$$\sin. \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a'$$

$$\sin. \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} b'$$

$$\sin. \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} c'.$$

Beispiel: $a = 48^\circ 36' 20''$, $b = 68^\circ 32'$,
 $c = 40^\circ 24' 32''$.

10) Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben. Man soll die Winkel des zugehörigen Sehnendreiecks bestimmen.

Lösung. Nach §. 37. der ebenen Trigonometrie ist, wenn man die Winkel des Sehnendreiecks mit A', B', C' bezeichnet;

$$\cos A' = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}.$$

Substituirt man hier für a' , b' , c' ihre Werthe aus der vorigen Aufgabe, so hat man

$$\cos. A' = \frac{(\sin. \frac{1}{2} b)^2 + (\sin. \frac{1}{2} c)^2 - (\sin. \frac{1}{2} a)^2}{2 \sin. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} c},$$

und eben so

$$\cos. B' = \frac{(\sin. \frac{1}{2} a)^2 + (\sin. \frac{1}{2} c)^2 - (\sin. \frac{1}{2} b)^2}{2 \sin. \frac{1}{2} a. \sin. \frac{1}{2} c},$$

$$\cos. C' = \frac{(\sin. \frac{1}{2} a)^2 + (\sin. \frac{1}{2} b)^2 - (\sin. \frac{1}{2} c)^2}{2 \sin. \frac{1}{2} a. \sin. \frac{1}{2} b}.$$

11) Die drei Kanten einer Ecke eines Parallelepipedon, so wie die Winkel, welche diese mit einander bilden, sind gegeben. Man bestimme die Oberfläche und den körperlichen Inhalt desselben.

Lösung. Wenn a , b , c die 3 Kanten, und α , β , γ die drei Winkel bedeuten, welche die Kanten ab , bc , ca mit einander bilden, so ist die Oberfläche $= 2 (ab \sin \alpha + ac \sin \beta + bc \sin \gamma)$.

Da die drei Winkel α , β , γ der Ecke gegeben sind, so findet man leicht nach Aufgabe Nr. 4. das Perpendikel, welches von einer Spitze des dadurch gegebenen sphärischen Dreiecks auf die ihr gegenüberstehende Seite gefällt ist, oder die Neigung einer Kante der Pyramide gegen die gegenüberstehende Fläche, und durch dieselbe die Höhe des Parallelepipedon und seinen körperlichen Inhalt

Beispiel: $a = 36'$, $b = 20'$, $c = 15'$; $\alpha = 75^\circ 30'$, $\beta = 82^\circ 10'$, $\gamma = 80^\circ 50'$.

12) Die drei Kanten C einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 36.), so wie die Winkel, welche diese mit einander bilden, sind gegeben. Man bestimme die Neigungswinkel der Seitenflächen, die ebenen Winkel, die Oberfläche und den körperlichen Inhalt der Pyramide.

Lösung. Gegeben AC, CD, BC, $\angle$ ACD, $\angle$ ACB, $\angle$ DCB.

Die Neigungswinkel der Seitenflächen an der Ecke C findet man nach §. 50. aus den drei Seiten des sphärischen Dreiecks.

Die Kanten AD, BD, AB, so wie die ebenen Winkel DAC, CDA, CDB, DBC, CAB, CBA nach §. 36., indem in jedem der treffenden drei Dreiecke zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

Die Winkel des Dreiecks ABD bestimmt man aus seinen drei Seiten. Die Neigungswinkel bei den Ecken A, B, D findet man, wie bei der Ecke C, aus den drei Kanten und den drei ebenen Winkeln einer jeden.

Die Oberfläche der Pyramide erhält man durch die Summe der vier Dreiecke, deren Flächeninhalt leicht zu finden.

Den körperlichen Inhalt endlich findet man, wenn man irgend eine Dreiecksfläche zur Grundfläche wählt, wie in der vorigen Aufgabe den

Neigungswinkel der Kante gegen die Grundfläche, und dadurch die Höhe der Pyramide sucht, und das Produkt von der Grundfläche und Höhe durch drei dividirt.

Beispiel: $AC = 40'$, $CD = 48'$, $BC = 50'$;
 $\angle ACD = 28^\circ$, $\angle ACB = 35^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$.

Berichtigungen.

Seite 16. Zeile 9 und 10 von oben, so wie auf der letzten Zeile lese man r statt o.

» 19. vorletzte Zeile an die Stelle non I, II, III, IV. zu setzen: IV, III, II, I.

» 26. letzte Zeile statt dessen lies deren.

» 35. 11. Zeile von oben statt BF lies CF.

» 37. 4. » » unten » u lies β .

» 41. 6. » » » setze man nach Buchstaben die Worte: des grössern, hinein.

» 78. 6. Zeile von oben statt Sin. C lies Cos. C.

Empfehlungswerthe Schriften und Vorlagen

für

Gewerbs- und polytechnische Schulen,
welche

in der Riegel und Wiessnerschen Buchhandlung in Nürnberg erschienen und durch alle Buchhandlungen zu haben sind.

Deininger, Musterzeichnungen zu Schlosserarbeiten vom 15ten bis 19ten Jahrhundert, als Vorlagen für technische Schulen. Unter Leitung des Architects C. Heideloff herausgegeben I. II. Heft, Querfolio, geheftet, jedes Heft 20 Gr. oder 1 Fl. 30 Xr.

Das 3te Heft erscheint noch im Jahre 1836.
Hermann, Dr. und Prof. Ueber polytechnische Institute im Allgemeinen und über die Erweiterung der technischen Schule in Nürnberg insbesondere. gr. 8. 1836. geheftet 20 Gr. oder 1 fl. 21 Xr.

— — II. Heft, Versuch einer Darstellung der Anstalten für technische Bildung in Frankreich, mit Hinsicht auf das Schulwesen in Bayern. gr. 8. 1828. 16 Gr. oder 1 Fl.

— — Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. gr. 8. 1826. 2 Thlr. oder 3 Fl.

Heideloff, C., der Bau- und Möbelschreiner, ein Handbuch für das Schreinergewerke und

für Bauliebhaber, insbesondere für den geschmackbildenden und technischen Theil in der polytechnischen Anstalt zu Nürnberg. I. II. Heft. Fol. Das Heft 1 Thlr. oder 1 Fl. 36 Xr.

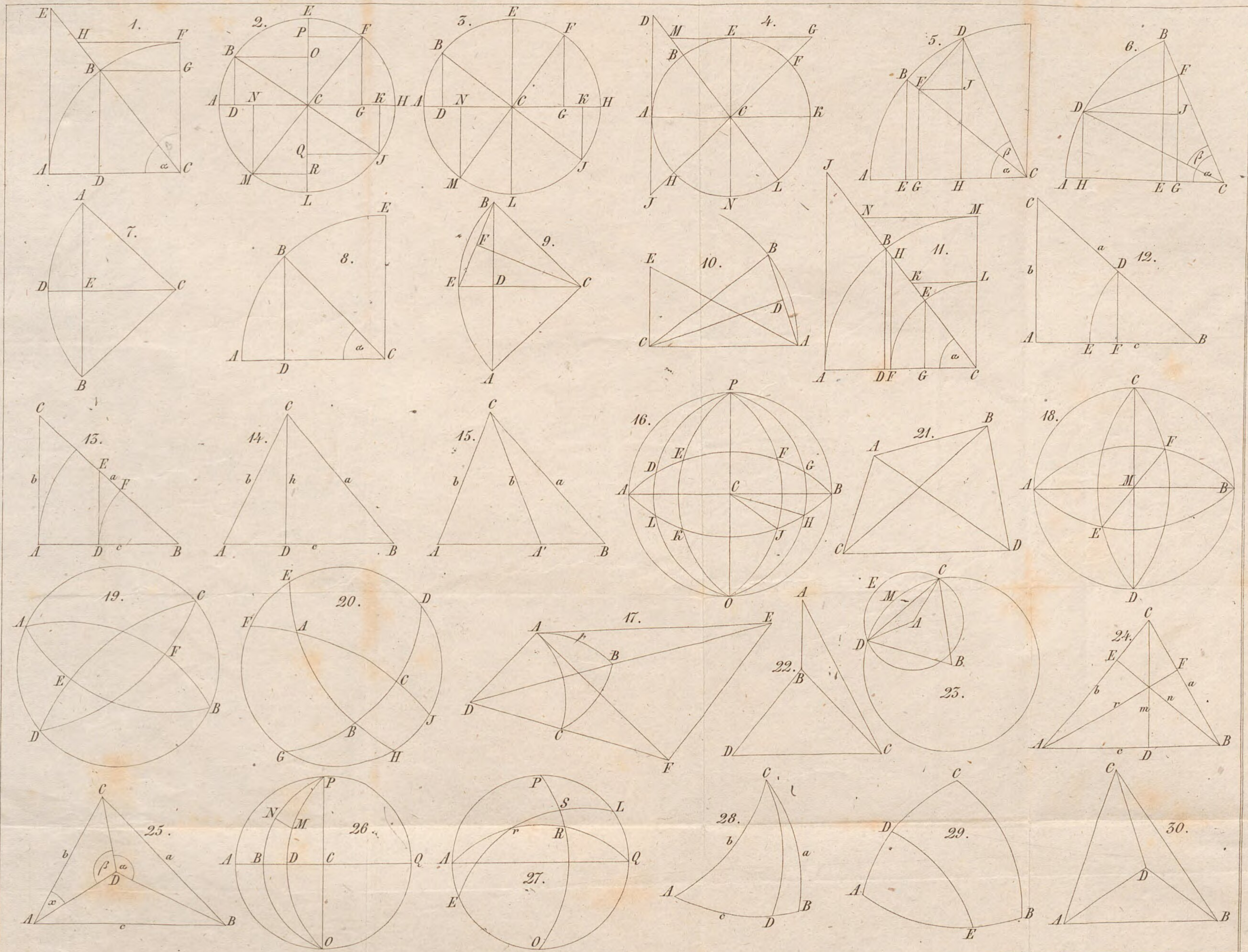
Heideloff, C., die architectonischen Glieder der Construction, Zusammenstellung und Verzierung etc. Ein Beitrag zur Geschmackbildungslehre in Bau- und Gewerbsschulen für die polytechnische Anstalt in Nürnberg bearbeitet. I. Heft. 20 Gr. oder 1 Fl. 20 Xr. II. Heft 1 Thlr. oder 1 Fl. 36 Xr.

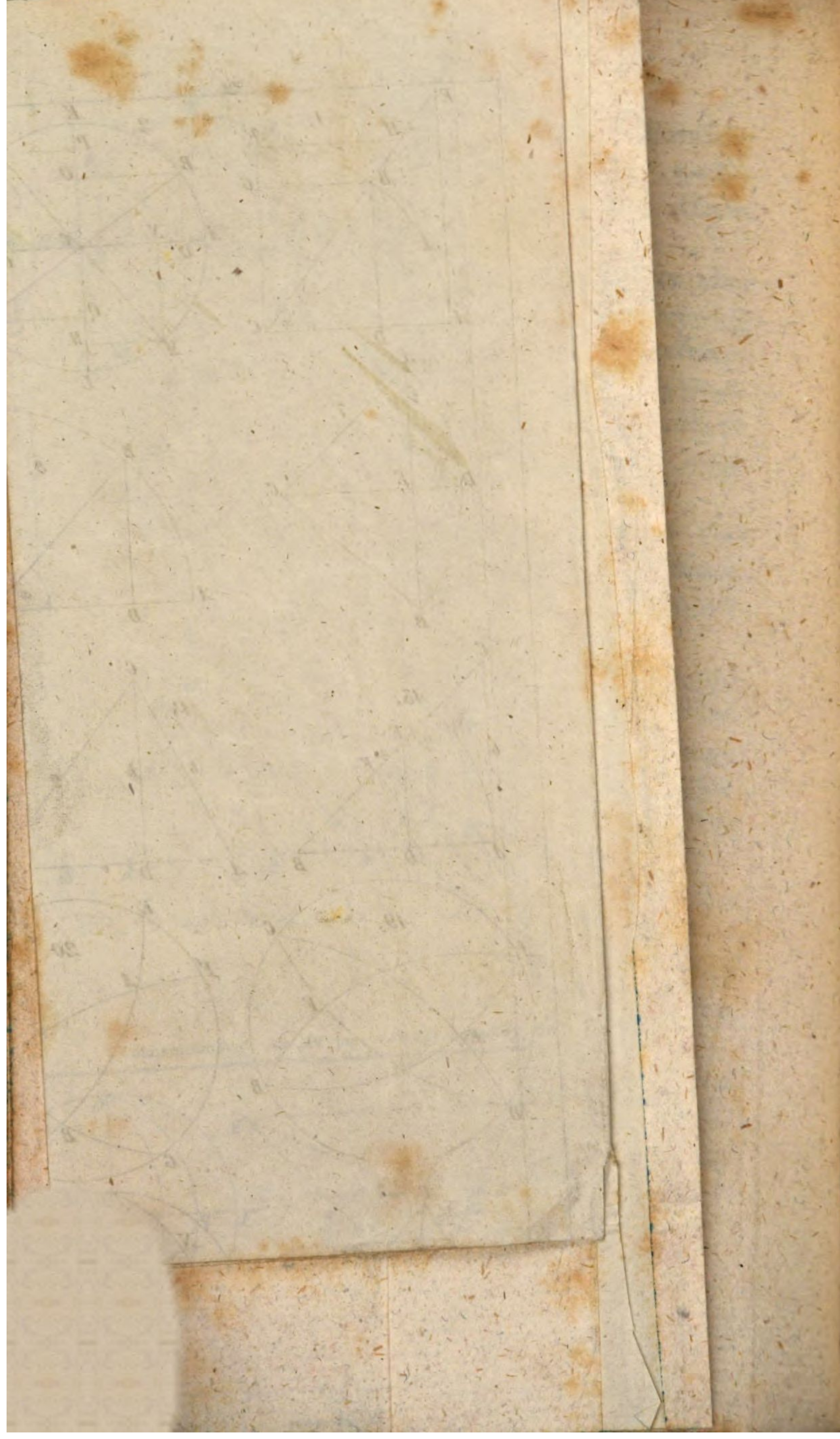
— — der kleine Grieche. Taschenbuch der altgriechischen Säulenordnungen. Zum Handgebrauch etc. Mit 1 Kupft. 12. 1836. broch. 10 Gr. oder 40 Xr.

Heideloff, Manfred, (Lehrer an der polytechnischen Anstalt). Zeichnungslehre von den Ornamenten aus den besten Mustern zusammengetragen. 6 Hefte. Querfolio. Jedes Heft 48 Xr. oder 12 Gr., in einen Band gebunden. 3 Thlr. 8 Gr. oder 5 Fl.

— — und Rosée, Johann, (Lehrer an der polytechnischen Anstalt in Nürnberg). Vorübungen zum Freihandzeichnen für Gewerbschulen. 2 Curse. Querquart, in Umschlag. 1 Thlr. oder 1 Fl. 36 Xr.

Unterricht, leichtfasslicher, in der Mineralogie für den Land- und Gewerbsmann. Zur Selbstbelehrung und zum Gebrauche in Gewerbsschulen. gr. 8. geb. 12 Gr. oder 48 Xr.





Wöckel, Lorenz

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit einem Anhang trigon.
Aufgaben ; mit 1 Kupfertaf

Nürnberg 1836

Math.p. 642 r

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083119-7